ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE

1. Osnovni pojmovi i definicije

Osnovni model u teoriji verovatnoća je opit kod koga ostvarivanje određenih uslova ne dovodi do jednoznačnog rezultata. Skup svih logički mogućih ishoda nekog opita označavamo sa Ω, a njegove elemente tj. pojedinačne ishode ili kako se još zovu elementarni događaji sa ω.

Događaj *A* se definiše kao podskup *A* skupa Ω i on se realizuje ako i samo ako se ostvari neki ishod ω koji pripada podskupu *A*. Događaje označavamo velikim slovima *A*, *B*, *C*, ...sa ili bez indeksa. Ceo skup Ω je događaj koji se realizuje uvek i zato ga zovemo siguran ili izvestan događaj. Prazan podskup ϕ je nemoguć događaj.

Zbir (unija) dva događaja *A* i *B*, je događaj $A+B$ (ili $A\cup B$) koji se realizuje ako se realizuje bar jedan od dogadaja *A* i *B*.

Proizvod (presek) dva događaja *A* i *B*, je događaj *AB* (ili $A\cap B$) koji se realizuje ako se realizuje i *A* i *B*.

Ako je $AB=\phi$ tj. ako se događaji *A* i *B* ne mogu istovremeno realizovati reći ćemo da su događaji *A* i *B* disjunktni ili da se međusobno isključuju.

Operacija "-" dobijanja komplementarnog podskupa u Ω je operacija dobijanja suprotnog događaja: $\overline{A}$ je suprotan dogadaj događaju *A* ako i samo ako se on realizuje kad se *A* ne realizuje.

Činjenicu da realizacija događaja *A* povlači realizaciju događaja *B* zapisujemo $A\subset B$ i čitamo *A* implicira *B*.

Klasa $\mathcal{F}$ događaja koji se posmatraju kod jednog opita sa slučajnim ishodima čini σ-polje (σ- algebru) ako:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$,
3. $An \in \mathcal{F}$, $n = 1,2,... \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

2. Definicija verovatnoće

Verovatnoća *P*(.) je numerička funkcija definisana nad σ-poljem događaja $\mathcal{F}$, koja ima sledeće osobine:

1. nenegativnost: za svako $A \in \mathcal{F}$ važi $P(A) \geq 0$;
2. normiranost: $P(\Omega) = 1$;
3. σ-aditivnost: ako su $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1,2,...$ uzajamno disjunktni događaji

   $(\text{tj. } A_i A_j = \phi \text{ za } i \neq j)$ tada $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

3. Klasična definicija verovatnoće

Neka jc broj ishoda nekog opita konačan i neka su svi ishodi jednakoverovatni, tj. $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_n\}$ i $P(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = 1,...,n$. Tada se verovatnoća nekog događaja *A* definiše kao $P(A) = \dfrac{\text{broj } \omega_i \text{ u } A}{n}$ ili kako se često kaže: verovatnoća događaja A je odnos broja povoljnih ishoda (tj. ishoda koji pripadaju A) prema broju svih ishoda.

Primeri:

1. Bacaju se istovremeno novčić i homogena numerisana kocka pri čemu se registruje pojava lika i grba na novčiću i broj na gornjoj strani kocke.

   Opisati skup ishoda.

   Rešenje:

   Skup ishoda je:

   $\Omega = \{G1, G2, G3, G4, G5, G6, L1, L2, L3, L4, L5, L6\}$.

2. Strelac gađa u cilj 4 puta, pri čemu se registruju pogotci i promašaji. Opisati skup ishoda i događaja:

   A - da je gađanje započeto promašajem,

   B - da je rezultat svih gađanja isti,

   C - da je cilj pogođen dva puta,

   D - da je cilj pogođen bar dva puta.

   Rešenje:

   Označimo pogodak sa 1, a promašaj sa 0.

   Skup svih ishoda je:

   $$\Omega = \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0101, 0011, 0110, 1110, \\ 1101, 1011, 0111, 1111\}$$

   $A = \{0000, 0100, 0010, 0001, 0101, 0011, 0110, 0111\}$,

   $B = \{0000, 1111\}$,

   $C = \{1100, 1010, 1001, 0101, 0011, 0110\}$,

   $D = \{1100, 1010, 1001, 0101, 0011, 0110, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111\}$

3. Odrediti suprotne događaje događajima:

   A - pojava dva grba pri bacanju dva dinara,

   B - pojava bele kuglice prilikom izvlačenja jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele, 3 crne, 4 crvene kuglice,

   C - tri pogotka u tri gađanja,

   D - makar jedan pogodak u pet gađanja,

   E - ne više od dva pogotka u pet gađanja.

   Rešenje:

   $\overline{A}$ - pojava bar jednog pisma pri bacanju dva dinara,

   $\overline{B}$ - pojava crne ili crvene kuglice,

   $\overline{C}$ - makar jedan promašaj,

   $\overline{D}$ - svih pet promašaja,

   $\overline{E}$ - više od dva pogotka.

4. Tri igrača A, B i C igraju turnir na sledeći način: Prvu partiju igraju A i B, a C je slobodan. Drugu partiju igra C sa pobednikom prve partije i tako dalje sve dok jedan od igrača ne postigne dve pobede za redom. Registruju se rezultati partija. Opisati skup ishoda i događaje:

D - da je u trećoj partiji pobedio C,

E - da je turnir završen sa manje od 5 partija,

F - da je igran paran broj partija.

Rešenje:

Označimo sa A_i pobedu igrača A u *i*-toj partiji, sa B_i pobedu igrača B u *i*-toj partiji i C_i pobedu igrača C u *i*-toj partiji. Onda jc skup ishoda

$\Omega = \{A_1A_2, B_1B_2, A_1C_2C_3, B_1C_2C_3, A_1C_2B_3B_4, B_1C_2A_3A_4, ...\}$

a traženi događaji su:

$D = \{ A_1C_2C_3, B_1C_2C_3\}$,

$E = \{A_1A_2, B_1B_2, A_1C_2C_3, B_1C_2C_3, A_1C_2B_3B_4, B_1C_2A_3A_4\}$,

$F = \{A_1A_2, B_1B_2, A_1C_2B_3B_4, B_1C_2A_3A_4, ...\}$.

5. Meta se gađa sa tri metka. Uočimo događaje A_i - pogodak pri i-tom gađanju $(i = 1, 2, 3)$. Pomoću zbira i proizvoda događaja A_i i $\overline{A_i}$ predstaviti sledeće događaje:

   A - sva tri pogotka,

   B - sva tri promašaja,

   C - bar jedan pogodak,

   D - makar jedan promašaj,

   E - ne manje od dva pogotka,

   F - ne više od jednog pogotka.

   Rešenje:

   $A = A_1A_2A_3$, $B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $C = A_1 + A_2 + A_3$,

   $D = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$, $E = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3$,

   $F = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

6. Novčić se baca do prve pojave grba, ali najviše dva puta i registruje se niz od grbova i likova. Opisati sve moguće događaje vezane za ovaj opit.

   Rešenje:

   Skup svih ishoda je $\Omega = \{G, LG, LL\}$, a skup svih događaja vezanih za ovaj opit je

   $\mathcal{F} = \{\phi, \{G\}, \{LG\}, \{LL\}, \{G, LG\}, \{G, LL\}, \{LG, LL\}, \{G, LG, LL\}\}$.

7. Ako je $\mathcal{F}$ polje događaja iz Ω i $A, B \in \mathcal{F}$, dokazati da $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A \in \mathcal{F}$.

   Dokaz:

   Iz $A, B \in \mathcal{F}$ sledi da $\overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{F}$, a onda $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}$, odakle $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}$ tj. $\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} \in \mathcal{F}$ odnosno $A \cap B \in \mathcal{F}$.

   Kako je $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, a $B \setminus A = B \cap \overline{A}$, onda $A \setminus B$, $B \setminus A \in \mathcal{F}$.

8. Neka se eksperiment sastoji u bacanju dva dinara. Naći verovatnoću pojave dva grba.

   Rešenje:

   Skup svih ishoda je $\Omega = \{GG, PP, PG, GP\}$, a događaj čiju verovatnoću tražimo je $A = \{GG\}$.

Onda na osnovu klasične definicije vcrovatnoće $P(A)=\frac{1}{4}$.

9. Jedna kuglica je izvučena iz kutije koja sadrži 6 crvenih, 4 bele i 5 plavih kuglica. Odrediti verovatnoću da je izvučena kuglica:

   a) crvena,

   b) bela,

   c) plava,

   d) nije crvena,

   e) crvena ili bela.

   Rešenje:

   Na osnovu klasične definicije verovatnoće imamo:

   a) $p=\frac{6}{15}$, b) $p=\frac{4}{15}$, c) $p=\frac{5}{15}$, d) $p=1-\frac{6}{15}=\frac{9}{15}$, e) $p=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}=\frac{10}{15}$.

10. Kocka se baca jednom. Naći verovatnoću sledećih događaja:

    A - paran broj,

    B - pojavio se broj ne manji od 5,

    C - pojavio se broj ne veći od 5.

    Rešenje:

    Skup svih ishoda je $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, a traženi događaji su $A=\{2,4,6\}$A={2, 4, 6}, $B=\{5,6\}$, $C=\{1,2,3,4,5\}$.

    Onda, na osnovu klasične definicije verovatnoće $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{5}{6}$.

11. Kocka se baca dva puta. Naći verovatnoću događaja A - da se oba puta pojavi isti broj.

    Rešenje:

    Događaj $A=\{11,22,33,44,55,66\}$, a skup $\Omega=\{11,12,...,16,21,...,66\}$, pa je tražena verovatnoća $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

12. Bacaju se istovremeno dve kocke. Naći verovatnoću događaja:

    A- suma brojeva je 8,

    B- suma brojeva je veća od proizvoda;

    C- proizvod brojeva je 8.

    Rešenje:

    Traženi događaji su:

    $A=\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$,

    $B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$

    $C=\{(2,4),(4,2)\}$, a skup ishoda $\Omega=\{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$, pa su tražene verovatnoće $P(A)=\frac{5}{36}$, $P(B)=\frac{11}{36}$, $P(C)=\frac{2}{36}$.

13. Imamo dve kutije: u prvoj a belih i b crnih kuglica, a u drugoj c belih i d crnih kuglica. Iz svake kutije uzimamo po jednu kuglicu. Naći verovatnoću da obe kuglice budu bele.

Rešenje:

Svaka kuglica iz prve kutije se može kombinovati sa svakom kuglicom iz druge kutije, pa je ukupan broj ishoda $n=(a+b)(c+d)$. Broj povoljnih ishoda je $m=ac$, odakle je verovatnoća traženog događaja

$$p=\frac{ac}{(a+b)(c+d)}.$$

14. Uz uslove prethodnog zadatka naći verovatnoću da izvučene kuglice budu različitih boja.

Rešenje:

Kao i u prethodnom primeru $n=(a+b)(c+d)$, a $m=ad+bc$, odakle je $p=\frac{ad+bc}{(a+b)(c+d)}$.

15. Od pet slova sastavljena je reč "knjiga". Dete ne znajući da čita izmešalo je slova i ponovo ih sastavilo u proizvoljnom poretku. Kolika je verovatnoća da je opet dobilo reč "knjiga".

Rešenje:

$$p=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}.$$

16. U jednoj zgradi stanuje pet porodica sa po jednim detetom, tri porodice sa po troje dece i dve sa po petoro dece. Na slučajan način se biraju tri porodice. Odrediti verovatnoću da:

a) makar dve porodice imaju isti broj dece,

b) sve tri porodice imaju ukupno sedmoro dece.

Rešenje:

a) Izračunajmo prvo verovatnoću događaja A - da nikoje dve od tri slučajno izabrane porodice nemaju isti broj dece, a onda, tražena verovatnoća je $p=1-P(A)$.

Kako je $P(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}$, to je $p=1-\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{4}$.

b) Ukupan broj ishoda je kao i prethodnom slučaju $\binom{10}{3}$. Povoljni ishodi su kad se izaberu dve porodice sa po jednim detetom i jedna porodica sa petoro dece, ukupno $\binom{5}{2}\binom{2}{1}$ ili kad se izabere jedna porodica sa jednim detetom i dve sa tri deteta, ukupno $\binom{5}{1}\binom{3}{2}$. Odakle je

$$p=\frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{24}.$$

17. Špil od 52 karte deli se na slučajan način na dva jednaka dela po 26 karata. Naći verovatnoću da:

a) u svakom delu budu po dva asa,

b) u jednom delu ne bude ni jedan as, a u drugom sva četiri,

c) u jednom delu bude jedan as, a u drugom tri.

Rešenje:

a) $p=\dfrac{\binom{4}{2}\binom{48}{24}}{\binom{52}{26}}$, b) $p=\dfrac{2\binom{4}{4}\binom{48}{22}}{\binom{52}{26}}$, c) $p=\dfrac{2\binom{4}{1}\binom{48}{25}}{\binom{52}{26}}$.