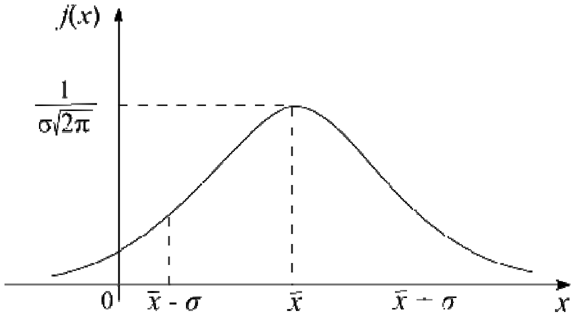
7.4 Slučajne promenljive sa neprekidnom raspodelom
7.4.1 Normalna raspodela

Za slučajnu promenljivu X kažemo da ima normalnu ili Gausovu raspodelu s parametrima μ i $\sigma^2 \left(\sigma^2 > 0\right)$, ako je njena gustina

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (27)$$

$-\infty < x < +\infty$ i označavamo je sa $X : N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Grafik normalne raspodele je



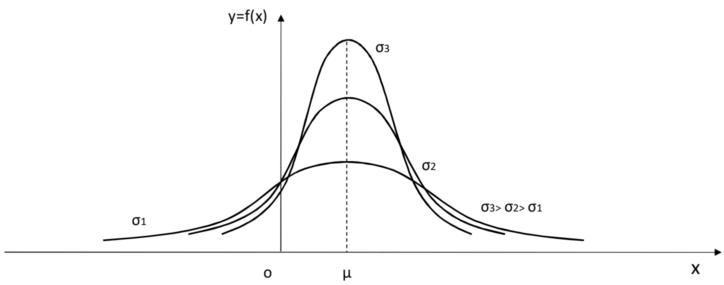
Slika 2.

Grafik ima pravilan zvonast oblik, a površina ispod grafika je jednaka 1.

Grafik je simetričan u odnosu na pravu $x = \mu$ sa maksimumom u tački $T\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ i prevojnim tačkama $x_{1,2} = \mu \pm \sigma$. Horizontalna asimptota je osa x.

Matematičko očekivanje slučajne promenljive sa normalnom raspodelom je μ, a disperzija je σ^2. Koeficijent asimetrije α jednak je 0, što znači da je raspodela idealno simetrična, a koeficijent spljoštenosti β je 3.

Na slici su prikazani grafici normalne raspodele za stalno μ i promenljivo σ.



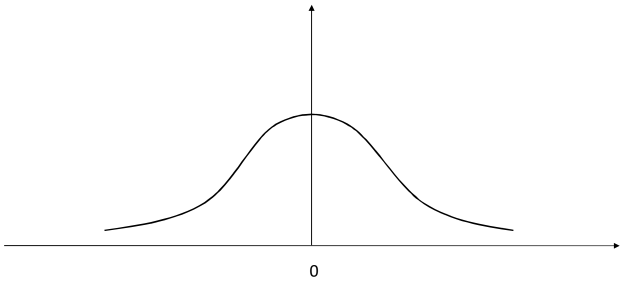
Slika 3.

Standardizovani oblik sličajne promenljive je $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ i kao što smo već videli $E(Z)=0$ i $\sigma^2(Z)=1$, a

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \quad \text{...} (28)$$

i pišemo $Z : N(0,1)$.

Na slici je prikazan grafik gustine standardizovane normalne raspodele.



Slika 4.

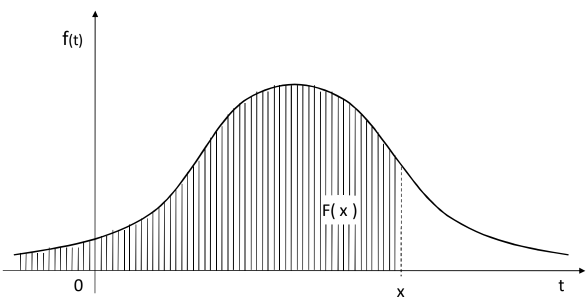
Funkcija $\varphi(z)$ definisana je, pozitivna i neprekidna za svako z. Ona je parna i njen dijagram je simetričan u odnosu na y-osu, a x-osa je horizontalna asimptota. U tački 0 ima maksimum $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989$, a u tačkama $B_1(1, 0{,}2420)$ i $B_2(-1, 0{,}2420)$ grafik funkcije ima prevojne tačke. Ako je $z > 4$, onda je $\varphi(z)$ približno jednaka 0.

Funkcija raspodele

Funkcija raspodele slučajne promenljive $X : N(\mu, \sigma^2)$ data je relacijama

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad \text{.......................................} (29)$$

Vrednost $F(x)$ je površina ispod grafika funkcije $f(x)$ u intervalu $(-\infty, x]$.



Slika 5.

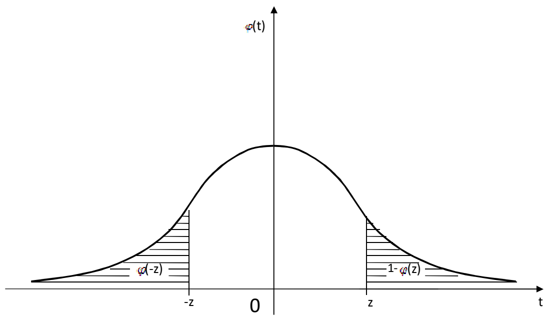
Kako je $F(\mu)=\frac{1}{2}$, to znači da se kod slučajne promenljive sa normalnom raspodelom i medijana i moda poklapaju sa matematičkim očekivanjem μ, odnosno aritmetičkom sredinom.

Označimo sa ϕ funkciju raspodele standardizovane slučajne promenljive $Z : N(0,1)$. Onda je

$$\phi(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\infty}^{z}\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt \quad \text{.......................................} (30)$$

Iz osobine gustine $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ i zbog simetrije je (videti sliku)

$$\phi(-z)=1-\phi(z) \quad \text{..} (31)$$



Slika 6.

Kako je $y=\varphi(t)$ parna, a površina ispod krive je jednaka 1, to zaključujemo da je $\phi(0)=\frac{1}{2}$.

Odredimo vezu između gustine $f(x)$ slučajne promenljive $X : N(\mu,\sigma^2)$ i gustine $\varphi(z)$ slučajne promenljive $Z : N(0,1)$.

Ako je $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, to iz $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, dobijamo da je $f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi(z)$, dakle vredi relacija

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi(z),\ Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{..} (32)$$

Primeri:

1. Za normalnu raspodelu $N(2,9)$ izračunati $f(4{,}64)$.

Rešenje:

$\sigma^2 = 9$, tj. $\sigma = 3$ pa je

$$f(4{,}64) = \frac{1}{3} f\left(\frac{4{,}64-2}{3}\right) = \frac{1}{3} f(0{,}88) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}27086 = 0{,}09029 .$$

Vrednost $\varphi(0{,}88)$ smo uzelli iz tablice IV.

Odredimo vezu između funkcije F i funkcije ϕ.

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = P\left\{Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

odakle sledi sledeća relacija

$$F(x) = \phi(z),\ z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{...(33)}$$

2. Neka je data slučajna promenljiva $X : N(4, 2{,}25)$.

   Izračunati verovatnoću $P\{X \le 7{,}3\}$.

   Rešenje:

$$P\{X \le 7{,}3\} = F(7{,}3) = \phi\left(\frac{7{,}3-4}{1{,}5}\right) = \phi(2{,}2) = 0{,}98610 .$$

   Vrednost $\phi(2{,}2)$ smo uzeli iz tablice V.

Verovatnoća slučajne promenljive u datom intervalu

Već smo videli da verovatnoća da neprekidna slučajna promenljiva uzme vrednost iz intervala

$$[x_1, x_2] \text{ je } P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{h_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) \quad \text{.................................(34)}$$

Ako je X slučajna promenljiva sa neprekidnom raspodelom $X : N(\mu, \sigma^2)$, koristeći se funkcijom raspodele ϕ standardizovane normalne raspodele Z dobijamo

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = \phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{...(35)}$$

Pošto je

$$P\{X \le x\} = F(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad \text{...(36)}$$

to je

$$P\{X > x\} = P(X \geq x) = 1 - F(x) = 1 - \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{..} (37)$$

Primer:

1. Data je slučajna promenljiva $X : N(5, 0{,}25)$.

   Izračunati sledeće verovatnoće:

   a) $P\{3{,}9 < X \leq 5{,}8\}$;

   b) $P\{5{,}4 < X < 6{,}8\}$;

   c) $P\{X > 4{,}7\}$;

   d) $P\{X < 3{,}8\}$.

   Rešenje:

   a) $P\{3{,}9 < X \leq 5{,}8\} = \phi\left(\frac{5{,}8-5}{0{,}5}\right) - \phi\left(\frac{3{,}9-5}{0{,}5}\right) =$

   $= \phi(1{,}6) - \phi(-2{,}2) = \phi(1{,}6) - [1 - \phi(2{,}2)] =$

   $= \phi(1{,}6) + \phi(2{,}2) - 1 = 0{,}94520 + 0{,}98610 - 1 = 0{,}93130$.

   b) $P\{5{,}4 < X < 6{,}8\} = \phi\left(\frac{6{,}8-5}{0{,}5}\right) - \phi\left(\frac{5{,}4-5}{0{,}5}\right) =$

   $= \phi(3{,}6) - \phi(0{,}8) = 0{,}99997 - 0{,}78814 = 0{,}21183$

   c) $P\{X > 4{,}7\} = 1 - \phi\left(\frac{4{,}7-5}{0{,}5}\right) =$

   $= 1 - \phi(-0{,}6) = 1 - [1 - \phi(0{,}6)] = \phi(0{,}6) = 0{,}72575$.

   d) $P\{X < 3{,}8\} = \phi\left(\frac{3{,}8-5}{0{,}5}\right) =$

   $= \phi(-2{,}4) = 1 - \phi(2{,}4) = 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$.

   Vrednosti funkcije ϕ uzeli smo iz tablice V.

Pravilo tri sigme kod normalne raspodele:

Odredimo verovatnoću da slučajna promenljiva $X : N(\mu, \sigma^2)$ uzima vrednosti iz intervala $(\mu - z\sigma, \mu + z\sigma)$, $z > 0$.

$$P\{\mu - z\sigma < X < \mu + z\sigma\} = \phi\left(\frac{\mu + z\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\mu - z\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \quad ....(38)$$

$$= \phi(z) - \phi(-z) = \phi(z) - [1 - \phi(z)] = 2\phi(z) - 1$$

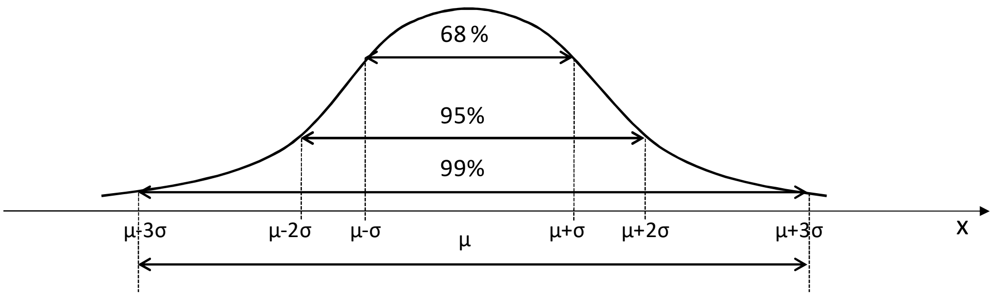
Ako je $z = 1, 2, 3, ...,$, onda dobijamo

$$P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = 0{,}6826 \, ;$$

$$P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = 0{,}9544 \, ;$$

$$P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = 0{,}9973 \, .$$

Znači, kod normalne raspodele u pojasu levo od μ za σ i desno od μ za σ nalazi se oko 0,68 jedinica statističke mase, dok levo od μ za 2σ i desno od μ za 2σ nalazi se oko 0,95 jedinica statističke mase. U pojasu levo od μ za 3σ i desno od μ za 3σ nalazi se oko 99% statističke mase.



Slika 7.

Možemo umesto funkcije raspodele da koristimo i funkciju oblika

$$\phi_1(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \, , \quad ....(39)$$

čije vrednosti imamo u tablici VI.

Jasno je da je odnos funkcije $\phi(z)$ i $\phi_1(z)$ dat relacijom

$$\phi_1(z) = 2\phi(z) - 1 \quad ....(40)$$

Primeri:

1. Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $X : N(120, 25)$. Odrediti simetričan interval oko tačke $\mu = 120$ u kome slučajna promenljiva uzima vrednost sa verovatnoćom $p = 0{,}95$.

   Rešenje:

   U tablici VI vidimo da je $\phi_1(z) = 0{,}95$ za $z = 1{,}96$, te imamo

$P\{120-5\cdot 1{,}96 < X < 120+5\cdot 1{,}96\} = 0{,}95$ tj.

$P\{110{,}2 < X < 129{,}8\} = 0{,}95$.

2. Mašina izrađuje neki proizvod. Karakteristična dimenzija tog proizvoda je slučajna promenljiva $X : N(\mu, \sigma^2)$. Polje tolerancije za tu dimenziju je interval $(\mu - z\sigma, \mu + z\sigma)$. Koliki je parametar σ^2, ako hoćemo da oko 95% proizvoda ima dimenziju u polju tolerancije širine 0,32?

   Rešenje:

   Na osnovu zahteva primera $p = 0{,}9545$ a iz tablice VI, $\phi_1(2) = 0{,}9545$ za $z = 2$. Znači,

   $P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = 0{,}954$, a širina ovog intervala je

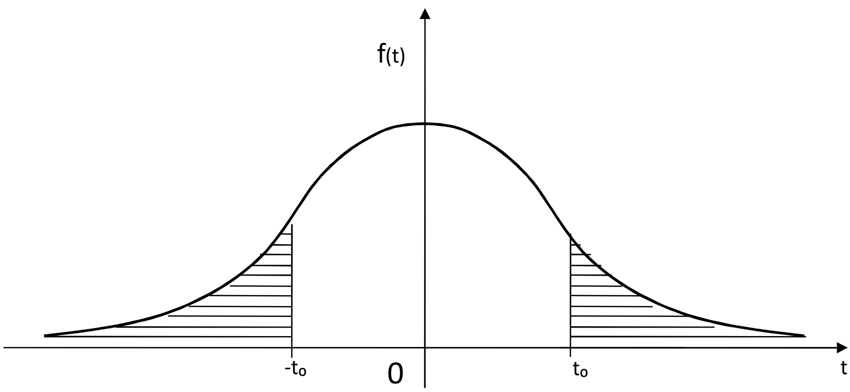
   $\mu + 2\sigma - (\mu - 2\sigma) = 4\sigma = 0{,}32$, prema zahtevu zadatka, odakle je $\sigma^2 = 0{,}0064$.

7.5 Slučajne promenljive sa Studentovom raspodelom

Slučajna promenljiva T ima Studentovu raspodelu, ako je njena gustina $f(t)$ data formulom:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{-n+1}{2}}, \qquad (40)$$

gde je $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ gama funkcija, a n prirodan broj. Broj n zovemo i broj stepena slobode.



Slika 8.

Funkcija $f(x)$ je neprekidna, parna, pozitivna za svako x, a asimptota joj je osa x.

Može se pokazati da za slučajnu promenljivu sa Studentovomo raspodelom važi

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2},\ n > 2,\ \alpha = 0,\ \beta = 3 + \frac{6}{n-4},$$

što znači da je Studentova raspodela nešto spljoštenija od normalne raspodele.

Funkcija raspodele slučajne promenljive sa Studentovom raspodelom data je izrazom

$$Sn(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{-n+1}{2}} dx \quad \text{...(41)}$$

U tablici VII date su vrednosti $Sn(t)$ za razne vrednosti t i različit broj stepena slobode, na osnovu kojih se može naći verovatnoća da slučajna promenljiva T uzima vrednost u intervalu $(-t, t)$, tj. $P\{-t \le T \le t\} = 2Sn(t) - 1$.

Verovatnoća da slučajna promenljiva T uzima vrednost van intervala $(-t, t)$ je

$$P\{|T| > t\} = 1 - (2Sn(t) - 1) = 2(1 - Sn(t)) \quad \text{...(42)}$$

(slika 8).

U tablici VIII u prilogu za datu vrednost $k = 1 - Sn(t_0)$ date su vrednosti t_0.

Primer:

1. Odrediti vrednost t_0 slučajne promenljive koja ima Studentovu raspodelu, ako je:
   a) $P\{t \le t_0\} = 0{,}95,\ n = 20$;
   b) $P\{t \ge t_0\} = 0{,}01,\ n = 15$;
   c) $P\{-t_0 \le t \le t_0\} = 0{,}95,\ n = 22$.

   Rešenje:
   Koristeći podatke iz tablice VIII imamo:
   a) $P\{t \le t_0\} = 0{,}95,\ n = 20$, odakle je $t_0 = 2{,}086$;
   b) $P\{t \ge t_0\} = 0{,}01,\ n = 15$, pa je $t_0 = 2{,}602$;
   c) $P\{-t_0 \le t \le t_0\} = 0{,}95,\ n = 22,\ t_0 = 2{,}074$

7.6 χ^2 raspodela

Neprekidna slučajna promenljiva X ima χ^2 raspodelu (čita se „hi“ kvadrat) ili gama raspodelu, ako je njena gustina:

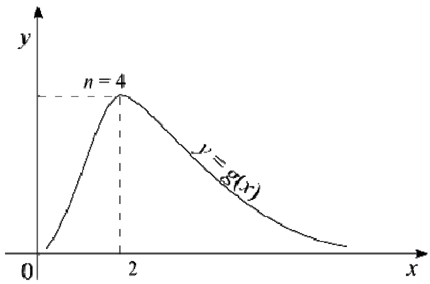
$$g(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n-2}{2}}\cdot e^{\frac{-x}{2}}, \quad \text{(43)}$$

gde je n prirodan broj i predstavlja broj stepena slobode.

Pošto je x uvek pozitivno, uzima se da je $x=\chi^2$, pa funkcija raspodele ima oblik

$$g(\chi^2)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot(\chi^2)^{\frac{n-2}{2}}\cdot e^{\frac{\chi^2}{2}}.$$

Grafik funkcije $y=g(x)$ je u prvom kvadrantu polazi od koordinatnog početka i raste do modusa $M_0=n-2$, a potom počinje da opada i asimptota je x - osa.



Slika 9.

Pokazuje se da je $E(\chi^2)=n$, $\sigma^2=2n$, $\alpha=\frac{4}{\sqrt{2n}}$, što znači da je raspodela pozitivno asimetrična i što je n veće postaje simetrična. Koeficijent spoljoštenosti $\beta=3+\frac{12}{n}$ i kad $n\to\infty$, spljoštenost teži normalnoj.

Neka je X slučajna promenljiva sa raspodelom $X:N(\mu,\sigma^2)$, onda je $\chi^2=\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$ slučajna promenljiva koja ima χ^2 raspodelu sa stepenom slobode $n=1$.

Ako su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne promenljive sa normalnom raspodelom $N(\mu,\sigma^2)$, tada je

$$\chi^2=\sum_{z=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$$

promenljiva sa χ^2 raspodelom sa stepenom slobode $n-1$, pri čemu je

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

slučajna promenljiva koju nazivamo aritmetička sredina promenljivih $X_1, X_2, ..., X_n$.

$$F\left(\chi_0^2\right)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\chi_0^2}\left(\chi^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot e^{\frac{\chi_0^2}{2}}d\left(\chi^2\right) \text{..(45)}$$

je funkcija raspodele.

U tablici X u prilogu date su vrednosti za funkciju raspodele za $n \leq 30$, a kako χ^2 raspodela teži normalnoj raspodeli sa povećanjem n, za $n > 30$ možemo koristiti vrednosti iz tablice za normalnu raspodelu.

Verovatnoća da slučajna promenljiva uzima vrednost izvan intervala $\left(0, \chi_0^2\right)$ je

$$P\left\{\chi^2 > \chi_0^2\right\}=1-F\left(\chi_0^2\right) \text{..(46)}$$

U tablici X iz priloga može se pročitati vrednost $F\left(\chi_0^2\right)$. Za $n > 30$, približnu vrednost χ_0^2 možemo izračunati pomoću Fišerove formule

$$\chi_0^2=\frac{1}{2}\left(z_0+\sqrt{2n-1}\right)^2, \text{...(47)}$$

a z_0 je određeno iz

$$\phi(z_0)=F\left(\chi_0^2\right), \text{..(48)}$$

gde je ϕ funkcija raspodela za standardizovanu normalnu raspodelu.

Primer:

1. Odrediti χ_0^2 za $n = 30$, ako je $P\left\{\chi^2 > \chi_0^2\right\}= 0{,}10$.

   Rešenje:

   Iz prethodnih relacija imamo:

   $$\phi(z_0)=F\left(\chi_0^2\right)=1-P\left\{\chi^2 > \chi_0^2\right\}=1-0{,}1=0{,}9 .$$

   U prilogu iz tablice V može se pročitati da je $\phi(z_0)=0{,}9$, za $z_0 = 1{,}28$, pa iz Fišerove formule imamo da je

   $$\chi_0^2=\frac{1}{2}\left(z_0+\sqrt{2n-1}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1{,}28+\sqrt{2\cdot 30-1}\right)=40{,}15 .$$

   Iz tablice X za $P\left\{\chi^2 > \chi_0^2\right\}= 0{,}10$ i stepen slobode $n = 30$ možemo pročitati da je stvarna vrednost $\chi_0^2 = 40{,}26$, odakle vidimo da se to ne razlikuje značajno od 40,15. Ubuduće ove relacije koristimo samo kad je $n > 30$, a u našem primeru za $n = 30$ smo koristili samo da uporedimo te vrednosti.