7. Osnovne raspodele slučajnih promenljivih

7.1 Binomna raspodela

Pretpostavimo da jedan opit ponavljamo n puta, pod istim uslovima i da nas interesuje samo realizacija događaja A. Neka je $P(A)=p$, a $P(\overline{A})=1-p=q$. Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj koliko puta se u n ponovljenih opita realizuje događaj A je diskretna slučajna promenljiva sa mogućim skupom vrednosti $\{0,1,...,n\}$. Odredimo njenu raspodelu verovatnoća tj. verovatnoće $P\{X=k\}$, $k=0,1,...,n$. Događaj $\{X=k\}$ možemo shvatiti kao skup svih nizova dužine n, gde se A javlja k puta, a $\overline{A}$ $n-k$ puta. Kako takvih nizova ima $\binom{n}{k}$, a svi imaju jednaku verovatnoću $p^k q^{n-k}$, konačno dobijamo da je

$$p_k = P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \qquad (15)$$

Tako, određena raspodela verovatnoća zove se binomna raspodela, a koja zavisi od dva parametra n i p, pa je označavamo $X:\mathrm{B}(n,p)$.

Primeri:

1. Kolika je varovatnoća da će se prilikom 10 bacanja novčića glava pojaviti 3 puta?

   Rešenje:

   Ovde je X broj koji predstavlja koliko puta u 10 bacanja je pala glava, a događaj A koji nas interesuje je: “da padne glava”. Dakle, u ovom primeru X ima raspodelu $\mathrm{B}\left(10,\frac{1}{2}\right)$, pa je tražena verovatnoća

   $$p_3 = P\{X=3\}=\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=120\cdot\frac{1}{2^{10}}=0{,}1172.$$

   U ovom primeru izračunali smo verovatnoću koristeći se formulom. Međutim, za neke vrednosti parametara n i p možemo verovatnoće pročitati iz tablice u prilogu.

2. Jedna mašina daje 5% neispravnih proizvoda konstantno tokom vremena. Kolika je verovatnoća da se među 6 proizvoda nađu 3 neispravna proizvoda?

   Rešenje:

   Verovatnoća da će proizvod biti neispravan je $p=0{,}05$, a da će proizvod biti ispravan je $q=1-p=0{,}95$, $n=6$, $k=3$. Prema formuli tražena verovatnoća je $p_3 = P\{X=3\}=\binom{6}{3}\cdot 0{,}05^3\cdot 0{,}95^3=0{,}002$.

   U slučaju velikih vrednosti k i n često se koristimo rekurzivnim obrascem za izračunavanje verovatnoće, koji dobijamo iz odnosa prethodne i naredne verovatnoće. Naime, imamo da je

   $$p_{k+1}=\binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-(k+1)},$$

   pa je

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot p^{k+1}\cdot q^{n-(k+1)}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k\cdot q^{n-k}}$$, odakle posle sređivanja dobijamo

$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}$, odnosno $p_{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}\cdot p_k$ .... (16)

Izraz (16) predstavlja rekurzivni obrazac koji možemo primeniti za izračunavanje verovatnoće p_{k+1} kada smo već izračunali verovatnoću p_k. Tako, za $k=0,1,2,...,n$ imamo $p_1=n\cdot\frac{p}{q}\cdot p_0$, $p_2=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{p}{q}\cdot p_1$, $p_3=\frac{n-2}{3}\cdot\frac{p}{q}\cdot p_2$, ...

To znači, da, ukoliko znamo p_o, možemo da izračunamo $p_1, p_2, ...$ Verovatnoću p_o, lako izračunavamo jer je $p_o=q^n$.

3. U skupu proizvoda očekujemo da bude 10% neispravnih. Iz tog skupa izaberimo 6 proizvoda. Izračunajmo sve verovatnoće za $k=0,1,...,6$ na osnovu rekurzivne formule.

   Rešenje:

   Prvo izračunajmo $p_0=q^n=0{,}9^6=0{,}531$, jer je $p=0{,}1$, a $q=1-p=0{,}9$ i $n=6$.

   Radi lakšeg računanja formirajmo tabelu:

Tabela 1.

k	$\frac{n-k}{k+1}$	$\frac{p}{q}$	p_k
0	-	0,111	0,531
1	6/1	0,111	0,354
2	5/2	0,111	0,099
3	4/3	0,111	0,015
4	3/4	0,111	0,001
5	2/5	0,111	0,000
6	1/6	0,111	0,000
Σ			1,000

$p_1=6\cdot\frac{0{,}1}{0{,}9}\cdot 0{,}531=0{,}354$

$p_2=\frac{5}{2}\cdot 0{,}111\cdot 0{,}354=0{,}099$ i td.

Parametri binomne raspodele

Parametri slučajne promenljive $X:\mathrm{B}(n,p)$ jesu:

1. matematičko očekivanje $E(X)=np$
2. varijansa ili disperzija $\sigma^2(X)=npq$

3. standardna devijacija $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

4. koeficijent varijacije $V=\sqrt{\dfrac{q}{np}}$

5. koeficijent asimetrije $\alpha=\dfrac{(q-p)^2}{npq}$

6. koeficijent spljoštenosti $\beta=3+\dfrac{1-6pq}{npq}$

U opštem slučaju binomna raspodela je asimetrična. Asimetrija je veća ukoliko se p i q više među sobom po veličini razlikuju.

Ako je $p=q=\dfrac{1}{2}$, binarna raspodela je simetrična.

Ako je $p<\dfrac{1}{2}$, tada je pozitivno asimetrična, odnosno ako je $p>\dfrac{1}{2}$, tada je negativno asimetrična. Kad $n\to\infty$, $\alpha\to 0$ tj. za dato p binomna raspodela smanjuje svoju asimetriju ako n raste.

Kad $n\to\infty$, $\beta\to 3$, tj. binomna raspodela teži obliku sa normalnom spljoštenošću sa porastom veličine n.

7.2 Puasonova raspodela

Za slučajnu promenljivu X koja uzima vrednosti u skupu $\{0,1,2,...\}$ kažemo da ima Puasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda>0$, u oznaci $X:\mathrm{P}(\lambda)$, ako je njen zakon raspodele:

$$p_k=P\{X=k\}=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{...} (17)$$

Puasonova raspodela je i jedna od aproksimacija binomne raspodele. Naime, računanje verovatnoća p_k u slučajevima kada je n veliko je skopčano sa računskim teškoćama, pa su od interesa aproksimativni izrazi za verovatnoće p_k kad je n veliko, recimo $n>50$, a $np<10$.

Puasonova aproksimacija

Ako označimo $np=\lambda>0$, tada je

$$p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\sim e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,... \quad \text{..} (18)$$

kad $n\to\infty$.

Primeri:

1. Verovatnoća da je jedan proizvod defektan je 0,01. Iz velikog skladišta uzima se 100 proizvoda. Kolika je verovatnoća da među tih 100 proizvoda:
   a) bude tačno 5 defektnih;
   b) broj defektnih nije veći od 10.

   Rešenje:

   Događaj A je: "da je proizvod defektan" $P(A)=p=0{,}01$, a $q=0{,}99$. Slučajni izbor 100 proizvoda možemo shvatiti kao ponavljanje tog opita 100 puta u neizmenjenim uslovima tako da su pojedini opiti međusobno neizmenjeni. Možemo primeniti Puasonovu aproksimaciju, jer je $np = 100 \cdot 0{,}01 = 1 < 10$, pa je

a) $P\{X = 5\} = \binom{100}{5} \cdot 0{,}01^5 \cdot 0{,}99^{95} \approx e^{-1} \cdot \frac{1^5}{5} = 0{,}003$

b) $p = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{5} 0{,}01^k \cdot 0{,}99^{100-k} \approx \sum_{k=0}^{10} e^{-1} \cdot \frac{1^k}{k!} = 1000$.

Kako je Puasonova raspodela jednoznačno određena parametrom λ, to njena karakteristična svojstva izražavamo kao funkcije parametra λ.

Matematičko očekivanje je λ, a disperzija $\sigma^2 = \lambda$. Osobinu da je $E(X) = \sigma^2$ ima samo Puasonova raspodela, pa kažemo da svaka raspodela u kojoj je $E(X) = \sigma^2$ jeste Puasonova raspodela.

Koeficijent varijacije je $V = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$, a koeficijent asimetrije je $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Puasonova raspodela je uvek pozitivno asimetrična i teži simetričnoj raspodeli kad $\lambda \to \infty$.

Koeficijent spljoštenosti $\beta = 3 + \frac{1}{\lambda} \to 3$, kada $\lambda \to \infty$ pokazuje da Puasonova raspodela teži obliku sa normalnom spljoštenošću sa porastom veličine λ.

Izračunavanje verovatnoće prema Puasonovoj raspodeli može se olakšati primenom rekurzivnog obrasca

$$p_k = \frac{\lambda}{k} \cdot p_{k-1}, \; k \ge 1 \quad \text{.........} \quad (19)$$

Obrazac nam omogućava postupno izračunavanje ostalih verovatnoća, kada znamo verovatnoću p_0 čija se vrednost računa prema izrazu $p_0 = e^{-\lambda}$.

2. Za slučajnu promenljivu $X : \mathrm{P}(1,2)$ izračunati verovatnoće $p_k (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ i odgovarajuće parametre.

   Rešenje:

   Na osnovu izraza $p_0 = e^{-\lambda}$ je $p_0 = e^{-1,2} = 0{,}30119$.

   Ostale verovatnoće računamo prema rekurzivnom obrascu:

   $$p_1 = \frac{1,2}{1} p_0 = 0{,}36143, \; p_2 = \frac{1,2}{2} p_1 = 0{,}21685,$$

   $$p_3 = \frac{1,2}{3} p_2 = 0{,}08674, \; p_4 = \frac{1,2}{4} p_3 = 0{,}002602.$$

   Odredimo koeficijente α i β:

   $$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1,2}} > 0, \; \beta = 3 + \frac{1}{\lambda} = 3{,}83 > 3.$$

   Dakle, raspodela ima desnostranu asimetriju i spljoštenost veću od normalne.

7.3 Hipergeometrijska raspodela

Neka u skupu od N elemenata njih M ima neko obeležje A, a $N - M$ je bez tog obeležja i neka iz tog skupa uzimamo uzorak od n elemenata. Označimo sa X broj elemenata s obeležjem A u uzorku od n elemenata. Očigledno je da je X slučajna promenljiva koja uzima konačan broj vrednosti $X: 0, 1, ..., k, ..., n$, ako je $n \leq M$. Sad treba da odredimo verovatnoće $p_k = P\{X = k\}$.

Pod elementarnim ishodom podrazumevaćemo svako izvlačenje uzorka od n elemenata iz skupa od N elemenata.

Znači, broj elementarnih ishoda jednak je $\binom{N}{n}$, jer na toliko načina se iz skupa od N elemenata može izvući uzorak od n elemenata.

Događaj $\{X = k\}$ čine svi ishodi kod kojih se u uzorku od n elemenata nalazi k sa obeležjem A i njih $n-k$ bez tog obeležja.

Takvih ishoda ima $\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}$, jer se na toliko načina može izvući uzorak koji ima k elemenata sa obeležjem A i $n-k$ elemenata bez tog obeležja. Prema tome, verovatnoća

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (20)$$

Tako određena raspodela verovatnoća zove se hipergeometrijska raspodela, koja zavisi od parametara N, M i n, pa je označavamo $X: H(N, M, n)$.

Ako treba izračunati verovatnoće p_k za više uzastopnih vrednosti k, pogodnije je upotrebiti rekurzivnu formulu:

$$p_k = \frac{(M-k+1)(n-k+1)}{k(N-M-n+k)} \cdot p_{k-1}, \; k \geq 1 \qquad (21)$$

Gornja formula omogućava da iz verovatnoće p_0 izračunamo p_1, p_2 i tako redom sve ostale, gde je verovatnoća

$$p_0 = \frac{\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}} \qquad (22)$$

Ako je $X: H(N, M, n)$, tada je

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}, \qquad (23)$$

a

$$\sigma^2 = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{n \cdot M(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} \qquad (24)$$

Koeficijent asimetrije je

$$\alpha = \frac{(N-2M)^2(N-2n)^2(N-1)}{M(N-M)n(N-n)(N-2)^2}, \qquad (25)$$

pa je hipergeometrijska raspodela u opštem slučaju asimetrična. Ako je

$$M = N - M = \frac{N}{2},$$

onda je $\alpha = 0$, pa je raspodela simetrična i $p_k = p_{n-k}$, za svako k.

Ako uzmemo da je

$$p = \frac{M}{N} \text{ i } q = \frac{N-M}{N}$$

i pustimo da $M \to \infty$, $(N-M) \to \infty$ i $N \to \infty$, imamo da

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad (26)$$

odnosno hipergeometrijski raspodela teži binomnoj raspodeli.

Primer:

1. U skupu od 40 proizvoda je 32 dobrih i 8 loših. Kolika je verovatnoća da u uzorku od 6 proizvoda uzetom iz tog skupa nađemo 2 loša?

   Rešenje:

   Označimo sa X broj loših proizvoda u uzorku od 6 proizvoda, pa je X slučajna promenljiva sa hipergeometrijskom raspodelom

   $X : H(N = 40, M = 8, n = 6)$.

   Odatle imamo da je

   $$p_2 = P\{X = 2\} = \frac{\binom{8}{2}\binom{32}{4}}{\binom{40}{6}} = 0,262.$$

   Ako treba izračunati verovatnoće i za vrednosti $X : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ koristimo se rekurzivnom formulom i verovatnoćom

   $$p_0 = \frac{\binom{32}{6}}{\binom{40}{6}} = 0,236.$$

   Račun je dat u tabeli 2.

   Tabela 2.

$x = k$	$M - k + 1 = \\ = 9 - k$	$n - k - 1 = \\ = 7 - k$	$M - N - n + k = \\ = 26 + k$	$\frac{p_k}{p_{k-1}}$	p_k
0	9	7	26	-	0,236
1	8	6	27	$\frac{8 \cdot 6}{1 \cdot 27}$	0,420

2	7	5	28	$\frac{7\cdot 5}{2\cdot 28}$	0,262
3	6	4	29	$\frac{6\cdot 4}{3\cdot 29}$	0,072

Tabela 2. - nastavak

$x=k$	$M-k+1=$ $=9-k$	$n-k-1=$ $=7-k$	$M-N-n+k=$ $=26+k$	$\frac{p_k}{p_{k-1}}$	p_k
4	5	3	30	$\frac{5\cdot 3}{4\cdot 30}$	0,009
5	4	2	31	$\frac{4\cdot 2}{5\cdot 31}$	0,000
6	3	1	32	$\frac{3\cdot 1}{6\cdot 32}$	0,000