Глава 6
Оцењивање

1. Основни појмови

Додела вредности параметру основног скупа заснованих на вредностима одговарајуће статистике узорка се зове *оцењивање*. Вредност која се додељује параметру основног скупа, а која се базира на вредности статистичког узорка се назива *оцењена вредност* параметра скупа. Статистика узорка која се користи за оцењивње параметра скупа назива се *оцена*.

На даље ћемо увек претпостављати да је извучени узорак прост случајан узорак.

Поступак оцењивања укључује следеће етапе:

1) Избор узорка
2) Прикупљање неопходних информација од јединица узорка
3) Израчунавање вредности статистике узорка
4) Додела вредности одговарајућем параметру скупа

Оцењене вредности могу бити тачкасте и интервалне.

Вредност статистике узорка која се користи за оцену параметра скупа назива се *тачкаста оцењена вредност*. На пример, вредност аритметичке средине узорка $\overline{x}$, израчуната у неком узорку, је тачкаста оцењена вредност одговарајуће аритметичке средине скупа μ. Овакво оцењивање зависи од узорка и готово никад није права вредност аритметичке средине скупа.

Код *интервалног оцењивања*, конструише се интервал око тачкасте оцењене вредности и тврди се да овај интервал вероватно садржи одговарајући параметар скупа. Оцена се у случају, на пример, аритметичке средине, код овог типа оцењивања, даје у облику интервала $(\overline{x}-a, \overline{x}+a)$, где је a тзв. *маргинална грешка*. Избор маргиналне грешке a зависи од

1) Стандардне девијације $\sigma_{\overline{X}}$ аритметичке средине узорка $\overline{X}$
2) Нивоа поузданости који је додељен интервалу

При томе, ако је $\sigma_{\overline{X}}$ или поузданост већа, онда је већа маргинална грешка a.

Дакле, сваки интервал се конструише уз задавање *нивоа поузданости* и зове се *интервал поузданости* (или *интервал поверења*). Интервал поузданости је одређен на следећи начин:

$$\text{тачкаста оцењена вредност } \pm \text{ маргинална грешка}$$

Ниво поузданости који је придружен интервалу поверења показује колико можемо бити сигурни да овај интервал садржи праву вредност параметра скупа. Ниво поузданости се означава са

$$(1-\alpha)\,100\%,$$

где је α *ниво значајности*, а $1-\alpha$ *коефицијент поузданости*.

2. Оцењивање аритметичке средине основног скупа: σ познато

У случају када је стандардна девијација σ позната, могућа су следећа три случаја.

Случај I. Ако су испуњени услови:

1) Величина узорка је мала ($n < 30$)
2) Основни скуп има нормалну расподелу

онда, како смо видели у претходном поглављу, узорачка расподела од $\overline{X}$ је нормална са аритметичком средином μ и стандардном девијацијом $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, при услову да је $\dfrac{n}{N} \leq 0{,}05$.

Случај II. Ако је величина узорка велика ($n \geq 30$), онда, што је последица централне граничне теореме, за узорачку расподела од $\overline{X}$ користимо нормалну расподелу са аритметичком средином μ и стандардном девијацијом $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, при услову да је $\dfrac{n}{N} \leq 0{,}05$.

Случај III. Ако су испуњени услови:

1) Величина узорка је мала ($n < 30$)
2) Основни скуп нема нормалну расподелу или је његова расподела непозната

онда се користи тзв. непараметарски метод за одређивање интервала поверења за μ. Ми нећемо разматрати овај случај.

У прва два случаја $(1-\alpha)\,100\%$-интервал поверења за μ је

$$(\overline{x} - z\sigma_{\overline{X}}, \overline{x} + z\sigma_{\overline{X}})$$

или, како га, обично, краче означавамо

$$\overline{x} \pm z\sigma_{\overline{X}},$$

где је $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Вредност

$$E = z\sigma_{\overline{X}}$$

је маргинална грешка (оцене од μ).

Пример 1. Издавачка кућа је објавила нови уџбеник за студенте Универзитета у Београду. Продајни сектор ове фирме жели да формира реалну цену уџбеника и да би то остварио обавља истраживање просечне цене сличних уџбеника. Истраживачко одељење фирме узело је узорак од 25 одговарајућих уџбеника и утврдило је да је $\mu_{\overline{X}} = 90{,}50\$$. Познато је да је $\sigma = 7{,}50\$$ за књиге оваквог типа и да основни скуп има нормалну расподелу. Треба:

а) Одредити колика је тачкаста оцењена вредност просечне цене свих оваквих уџбеника за факултете.

б) Конструисати 90% интервал поверења за просечну цену оваквих уџбеника за факултете.

У овом примеру је σ познато, $n < 30$, али основни скуп има нормалну расподелу. Дакле, користимо нормалну расподелу. У примеру је

$$n = 25, \quad \overline{x} = 90{,}50\$, \quad \sigma = 7{,}50\$$$

Стандардан девијација од $\overline{X}$ је

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7{,}50\$}{\sqrt{25}} = 1{,}50\$$$

Тада је

а) Тачкаста оцењена вредност од μ је

$$\mu = \overline{x} = 90{,}50\$$$

б) Ниво поузданости је 90% или 0,90, па имамо да је

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}90}{2} = 0{,}05.$$

Из таблице за 0,0500 и 0,9500 одредимо одговарајуће вредности

$$z = -1{,}65 \quad \text{и} z = 1{,}65$$

Одавде добијамо да је

$$\overline{x} \pm z\sigma_{\overline{X}} = 90{,}50 \pm 1{,}65 \cdot 1{,}50 = 90{,}50 \pm 2{,}48.$$

Овде је 2,48 маргинална грешка. □

слика

Смисао нивоа поузданости је следећи. Сваки интервал поверења или садржи или не средњу вредност, тј. са вероватночом 0 или 1 садржи μ. Али ако узмемо више узорака (исте дужине) и за њих одредимо интервале поверења:

$$(\overline{x}_1 - z\sigma_{\overline{X}}, \overline{x}_1 + z\sigma_{\overline{X}}), \ldots, (\overline{x}_n - z\sigma_{\overline{X}}, \overline{x}_n + z\sigma_{\overline{X}})$$

онда приближно $(1-\alpha)100\%$ садржи μ (онда, ако је у питању претходни пример, приближно 90% њих садржи μ).

Ширина интервала поверења зависи од

1) вредности z, која је одређена нивоом поузданости;

2) величине узорка n.

При томе, можемо чак да одредимо карактер ових зависности. Наиме ако ниво поузданости расте, онда расте и z, а самим тим расте и ширина интервала. А, ако величина узорка расте, онда $\sigma_{\overline{X}}$ опада, па самим тим опада и ширина интервала поверења.

Дакле, ако желимо да смањимо ширину интервала поверења, то можемо учинити на два начина:

1) да смањимо ниво поузданости;

2) повећамо величину узорка.

Очигледно, да се другом начину, обично, даје предност. Како у пракси већи узорак значи и више потрошеног времена и више уложеног новца, то је веома важно за дати ниво поузданости одредити (приближно) величину узорка који ће нас довести до жељеног резултата. Из формуле

$$E = z\sigma_{\overline{X}} = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

следи да је

$$n = \frac{z^2\sigma^2}{E^2}\,.$$

Дакле, ако је задат ниво поузданости и σ основног скупа, то се величина узорка којим ћемо добити задату маргиналну грешку интервалне оцене од μ може одредити коришћењем управо изведене формуле, тј. узећемо да је

$$n = \left[\frac{z^2\sigma^2}{E^2}\right] + 1.$$

Пример 2. Удружење бивших студената жели да оцени просечан дуг овогодишњих дипломаца. Зна се да је $\sigma = 11.800\$$ Колику треба узети дужину узорка n да би маргинална грешка износила $E = 800\$$ уз ниво поузданости 99%?

За дати ниво поузданости добијамо да је $z = 2{,}58$. Дакле, добијамо да је

$$n = \left[\frac{z^2\sigma^2}{E^2}\right] + 1 = \left[\frac{(2{,}58)^2(11.800)^2}{800^2}\right] + 1 = 1449. \,\Box$$

3. Оцењивање аритметичке средине основног скупа: σ није познато

У случају када је стандардна девијација σ основног скупа није позната, могућа су следећа три случаја.

Случај I. Ако су испуњени услови:

1) Величина узорка је мала ($n < 30$)
2) Основни скуп има нормалну расподелу

онда се користи t-расподела за одређивање интервала поверења за μ.

Случај II. Ако је величина узорка велика ($n \geq 30$), такође користимо t-расподелу за одређивање интервала поверења за μ.

Случај III. Ако су испуњени услови:

1) Величина узорка је мала ($n < 30$)
2) Основни скуп нема нормалну расподелу или је његова расподела непозната

онда се користи тзв. непараметарски метод за одређивање интервала поверења за μ. Ми нећемо разматрати овај случај.

И у првом и другом случају користимо тзв. t-расподелу или такозвану студентову расподелу (расподелу је први описао енглески математичар W.S. Gosset 1908. године и то под псеудонимом Student), па је ред да се овде подсетимо како она изгледа.

слика (за различите σ)

Једини параметар код ове расподеле је број степени слободе који се означава са df (degrees of freedom) и рачуна се по формули $df = n-1$, где је n, као и обично, величина узорка. Аритметичка средина од t-расподеле је 0, а стандардна девијација $\sigma = \sqrt{df/(df-2)}$. Ова се расподела задаје таблицом у којој је дата површина десно од тражене вредности t.

слика (за различите σ)

Када стандардна девијација основног скупа σ није позната, онда је замењује стандардна девијација узорка S, која је њена оцена. Дакле, уместо $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ користимо $S_{\overline{X}} = S/\sqrt{n}$. Реализовану вредност ове оцене означавамо са $s_{\overline{X}}$, она је тачкаста оцењена вредност од $\sigma_{\overline{X}}$.

Слично као и у случају када је σ познато, $(1-\alpha)\,100\%$, интервал поверења за μ је

$$(\overline{x} - zs_{\overline{X}}, \overline{x} + zs_{\overline{X}})$$

или, како га, обично, краће означавамо

$$\overline{x} \pm z s_{\overline{X}},$$

где је

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}},$$

а t је вредност добијена из таблице за t-расподелу са $n-1$ степени слободе. Овде је

$$E = z s_{\overline{X}}$$

је маргинална грешка (оцене од μ).

Пример 3. Доктор Филип Филиповић жели да оцени просечан ниво холестерола код свих одраслих мушкараца у Краљеву. Узео је 25 одрасле мушке особе и утврдио да је просечан ниво холестерола у овом узорку 186 mg/dL са стандардном девијацијом 12. Претпостављамо да ниво холестерола код свих одраслих мушкараца има нормалну расподелу. Одредити 95% интервал поверења за аритметичку средину μ основног скупа.

Решење. Овде је σ непознато, $n < 30$, али основни скуп има нормалну расподелу, па се ради о првом случају. Дакле,

$$n = 25, \quad \overline{x} = 186, \quad s = 12$$

и ниво поузданости је 95% или 0,95. Имамо да је

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = 2{,}40.$$

Број степени слободе је

$$df = n - 1 = 25 - 1 = 24.$$

Укупна површина која се чита из таблице за t-расподелу је $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. А како је симетрично смештена у односу на y-осу, то из таблице треба наћи вредност t која одговара површини $0{,}05/2 = 0{,}025$. Из таблице добијамо да је $t = 2{,}064$.

слика (са осенченим површинама)

Напокон, добијамо да је

$$\overline{x} \pm t s_{\overline{X}} = 186 \pm 2{,}064 \cdot 2{,}40 = 186 \pm 4{,}95.$$

На крају, приметимо да ако је узорак сувише велик, онда одговарајућу вредност t не можемо наћи у таблици, јер је степен слободе за одговарајућу t-расподелу сувише велик. Тада, бирамо једну од две следеће опције:

1) Користимо t вредност из последњег реда (реда ∞) таблице за t-расподелу

2) Користимо нормалну расподелу као апроксимацију за t-расподелу