Matematičko očekivanje

Neka je X slučajna promenljiva diskretnog tipa sa konačnim skupom vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. U N ponovljenih i nezavisnih opita registrujemo vrednost za X. Neka se x_1 registruje N_1 opita, x_2 u N_2 opita, ..., vrednost x_n u N_n opita $(N_1 + N_2 + ... + N_n = N)$. Tad je srednja vrednost (u smislu aritmetičke sredine) svih registrovanih vrednosti

$$\overline{x}_N = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_n N_n}{N} = x_1 \frac{N_1}{N} + x_2 \frac{N_2}{N} + ... + x_n \frac{N_n}{N}.$$

Kod $N \to \infty$, relativna učestanost $\frac{N_k}{N}$ odgađaja $\{X = x_k\}$ grupiše se oko $P\{X = x_k\} = p(x_k)$, $k = 1, 2, ..., n$, tako da „granična vrednost“ od $\overline{x}_N$ kod $N \to \infty$ je broj:

$$x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + ... + x_n p(x_n).$$

Definicija 1.

Ako je slučajna promenljiva X diskretnog tipa sa raspodelom

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

njeno matematičko očekivanje definiše se kao broj:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k) \text{ ....} (7)$$

<u>Napomena:</u> ono postoji ako i samo ako $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k) p(x_k) < \infty$.

Definicija 2.

Ako je slučajna promenljiva X neprekidnog tipa sa gustinom $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, matematičko očekivanje se definiše kao broj

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \text{ ....} (8)$$

uz napomenu da postoji i konačan je broj ako i samo ako nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ konvergira.

Primeri:

1. Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive $X : U(a, b)$.

   Rešenje:

   $$\mathrm{E}(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

   Jedna važna činjenica za nalaženje matematičkog očekivanja:

   Neka je data slučajna promenljiva X (određena sa $p(x_i)$ ili $f(x)$) i funkcija $g(.)$. Treba naći očekivanje slučajne promenljive $Y = g(X)$. Prvo možemo naći raspodelu slučajne promenljive Y, pa onda njeno matematičko očekivanje po definiciji, međutim važi:

$$E(Y)=\sum_k g(x_k)p(x_k), \quad (9)$$

ako je X diskretnog tipa, odnosno,

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx, \quad (10)$$

ako je X neprekidnog tipa.

2. Izračunati $E(X^2)$ slučajne promenljive $X:U(a,b)$.

Rešenje:

$$\mathrm{E}(X^2)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\cdot(b^3-a^3)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Navešćemo neke osobine $E(X)$ bez dokazivanja:

1. $|E(X)|\le E(|X|)$.
2. Ako je $X=c$, c - konstanta, tada je $E(X)=c$.
3. $E(cX)=cE(X)$.
4. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
5. Ako je za svako $\omega\in\Omega$, $X\ge 0$, onda je $E(X)\ge 0$.
6. Ako je za svako $\omega\in\Omega$, $X\ge Y$, onda je $E(X)\ge E(Y)$.
7. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je $E(XY)=E(X)E(Y)$.

   Važi i proširenje: ako su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne promenljive, tada je

   $E(X_1, X_2, ..., X_n)=E(X_1)E(X_2)...E(X_n)$.

   <u>Napomena:</u> obrnuto tvrđenje ne važi, naime, iz $E(XY)=E(X)E(Y)$ ne sledi da su X i Y nezavisne.

Disperzija slučajne promenljive

Slučajna promenljiva X je potpuno određena svojom raspodelom. Matematičko očekivanje je prva i osnovna informacija o slučajnoj promenljivoj, ali ne može da zameni kompletnu informaciju koju daje raspodela. Naime, $E(X)$ ne daje podatak koliko je „rasturanje“ mogućih vrednosti slučajne promenljive oko „srednje vrednosti“.

Slučajna promenljiva $X-E(X)$ jeste odstupanje promenljive X od njene srednje vrednosti $E(X)$.

Očekivana vrednost odstupanja slučajne promenljive od njene očekivane vrednosti jednaka je nuli, tj. $E(X-E(X))=0$.

Posmatrajmo kvadrat odstupanja slučajne promenljive X od njene aritmetičke sredine $[X-E(X)]^2$.

Matematičko očekivanje od $[X-E(X)]^2$ dobra je mera za srednje-kvadratno odstupanje X od $E(X)$ i zovemo je disperzija ili varijansa slučajne promenljive X i označavamo sa $\sigma^2(X)$ ili $D(X)$, pa je

$$\sigma^2(X)=D(X)=E[X-E(X)]^2 \quad (11)$$

Kvadriranjem gornjeg izraza i primenom osobina matematičkog očekivanja dobijamo izraz

$$\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \text{ ,} \qquad (12)$$

koji je praktičniji pri računanju disperzije.

Pozitivna vrednost kvadratnog korena disperzije jeste standardna devijacija slučajne promenljive X, $\sigma(X)=+\sqrt{\sigma^2(X)}$.

Primer:

3. Odrediti $\sigma^2(X)$ i $\sigma(X)$ na primeru jednog bacanja kocke.

   Rešenje:

   Označimo sa X rezultat bacanja kocke. Tada slučajna promenljiva X ima raspodelu verovatnoće:

   $$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

   Očekivana vrednost je:

   $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$, a

   $E(X^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$ i

   $[E(X)]^2=\left(\frac{21}{6}\right)^2$,

   pa je disperzija slučajne promenljive X

   $\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2=\frac{105}{36}$,

   a standardna devijacija je $\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$.

   Neke osobine disperzije:

   $\sigma^2(X)\geq 0$, $\sigma^2(X)=0$ ako je X konstanta skoro izvesno.

   $\sigma^2(X+c)=\sigma^2(X)$

   $\sigma^2(cX)=c^2\sigma^2(X)$

   Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada važi $\sigma^2(X+Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)$.

   Funkcija od $\alpha : E(X-\alpha)^2$ ima minimum $\sigma^2(X)$ za $\alpha=E(X)$ tj. $\sigma^2(X)\leq E(X-\alpha)^2$ za svaki broj α i jednakost je dostignuta za $\alpha=E(X)$.

   Standardizovani oblik slučajne promenljive X je slučajna promenljiva $X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{\sigma^2 X}}$. Na osnovu osobina matematičkog očekivanja i disperzije, lako se pokazuje da je $E(X^*)=0$ i $\sigma^2(X^*)=1$.