# Formula potpune verovatnoće. Bajesova formula

Ako su $H_1, H_2, ..., H_n$ uzajamno disjunktni događaji, $P(H_i) > 0$, $i = 1,...,n$ i ako je $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, onda je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i), \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Bajesova formula (formula verovatnoća hipoteza). Pod uslovima prethodne teoreme važi

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} \quad i = 1,2,...,n.$$

***Primeri:***

1. U kupi je pet pušaka od kojih dve imaju snajper. Verovatnoća da strelac pogodi cilj iz puške sa snajperom je 0,95, a iz puške bez snajpera jc 0,7. Naći verovatnoću da je cilj pogođen, ako je strelac slučajno birao pušku.

   *Rešenje:*

   Razmotrimo hipoteze:

   $H_1$ - pucano je iz puške sa snajperom;

   $H_2$ - pucano je iz puške bez snajpera,

   i događaj A - cilj je pogođen. Verovatnoće hipoteza su:

   $P(H_1) = \frac{2}{5}$ i $P(H_2) = \frac{3}{5}$.

   Uslovne verovatnoće događaja A pri tim hipotezama su:
   $P(A|H_1) = 0,95$ i $P(A|H_2) = 0,7$.

   Primenjujući formulu totalne verovatnoće dobijamo

   $$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{2}{5} \cdot 0,95 + \frac{3}{5} \cdot 0,7 = 0,8.$$

2. Na tri struga obrađuju se isti mašinski elementi i to na prvom 50%, a na drugom 30% i na trećem 20% od svih elemenata. Pri tom prvi strug daje 90%, drugi 95%, a treći 85% standardnih elemenata.

   a) Naći verovatnoću da je slučajno izabrani element standardan.

   b) Ako je izabrani element standardan, kolika je verovatnoća da je obrađen na drugom strugu?

   *Rešenje:*

   Hipoteze su:

   $H_1$ - slučajno odabrani element je obrađen na prvom strugu;

   $H_2$ - slučajno odabrani element je obrađen na drugom strugu;

   $H_3$ - slučajno odabrani elemeni je obrađen na trećem strugu,

   i događaj $A$ - slučajno odabrani element je standardan.

   Verovatnoće hipoteza su:

   $P(H_1) = 0,5$; $P(H_2) = 0,3$; $P(H_3) = 0,2$.

Uslovne verovatnoće događaja $A$ pri ovim hipotezama su:

$P(A|H_1)=0{,}9$; $P(A|H_2)=0{,}95$; $P(A|H_3)=0{,}85$.

a) Primenjujući formulu totalne verovatnoće dobijamo

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}95+0{,}2\cdot 0{,}85=0{,}905$$

b) Na osnovu Bajesove formule imamo

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}95}{0{,}905}=0{,}315$$

3. Na avion se ispaljuju tri pojedinačna hica. Verovatnoća da avion bude pogođen prvim hicem je 0,4; drugim 0,5; a trećim 0,7. Da bi avion bio izbačen iz stroja potrebna su tri pogotka; u slučaju jednog pogotka avion će biti izbačen iz stroja sa verovatnoćom 0,2, a u slučaju dva pogotka 0,6. Kolika je verovatnoća da će kao ishod tog gađanja avion biti izbačen iz stroja?

   *Rešenje:*

   Događaj $A$ - avion je izbačen iz stroja, a hipoteze su:

   $H_0$ - avion nije pogodio nijedan hitac;

   $H_1$ - avion je pogodio jedan hitac;

   $H_2$ - avion su pogodila dva hica;

   $H_3$ - avion su pogodila tri hica.

   Verovatnoćc tih hipoteza su:

   $P(H_0)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09$;

   $P(H_1)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}36$;

   $P(H_2)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}41$;

   $P(H_3)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}14$.

   Uslovne verovatnoće događaja $A$ pri tim hipotezama su:

   $P(A|H_0)=0$; $P(A|H_1)=0{,}2$; $P(A|H_2)=0{,}6$; $P(A|H_3)=1$.

   Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo

   $P(A)=0{,}09\cdot 0+0{,}36\cdot 0{,}2+0{,}41\cdot 0{,}6+0{,}14\cdot 1=0{,}458$.

4. Dva strelca nezavisno jedan od drugog gađaju jednu metu ispaljujući po jedan metak. Verovatnoća da će prvi strelac pogoditi metu je 0,8, a drugi 0,4. Nakon izvedenog gađanja konstatovan je jedan pogodak u metu. Naći verovatnoću da je pogodio prvi strelac.

   *Rešenje:*

   Hipoteze su:

   $H_1$ - ni jedan strelac nije pogodio;

   $H_2$ - prvi strelac je pogodio, drugi promašio;

   $H_3$ - prvi strelac je promašio, drugi pogodio;

   $H_4$ - oba strelca su pogodila,

   i događaj $A$ - jedan pogodak u meti.

   Verovatnoće hipoteza su:

$P(H_1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12$;

$P(H_2)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48$;

$P(H_3)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$;

$P(H_4)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32$.

Uslovne verovatnoće događaja $A$ pri tim pretpostavkama su:

$P(A|H_1)=0$; $P(A|H_2)=1$; $P(A|H_3)=1$; $P(A|H_4)=0$.

Na osnovu formule za totalnu verovatnoću dobija se

$P(A)=0{,}12\cdot 0+0{,}48\cdot 1+0{,}08\cdot 1+0{,}32\cdot 0=0{,}56$.

Primenjujući Bajesovu formulu dobijamo da je tražena verovatnoća

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}48}{0{,}56}=\frac{6}{7}.$$

5. U kutiji su tri novčića od kojih su dva ispravna, a treći je iskovan tako da na obe strane ima pismo. Slučajno se uzima jedan novčić i baca 4 puta. Naći verovatnoću da je uzet ispravan novčić, ako je u sva četiri bacanja palo pismo.

   *Rešenje:*

   Razmatramo hipotcze:

   $H_1$ - uzet je ispravan novčić;

   $H_2$ - uzet je neispravan novčić,

   i događaj $A$ - četiri puta je palo pismo.

   Verovatnoće hipoteza su: $P(H_1)=\frac{2}{3}$ i $P(H_2)=\frac{1}{3}$.

   Uslovne verovatnoće događaja pri tim hipotezama su:

   $P(A|H_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^4$ i $P(A|H_2)=1$.

   Verovatnoća događaja $A$ je $P(A)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{3}{8}$,

   a tražena verovatnoća na osnovu Bajesove formule je

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{9}.$$

6. U kutiji se nalaze tri kuglice, od kojih svaka može biti bela ili crna. Sve pretpostavke o boji kuglica su jednakoverovatne. Iz kutije se 4 puta, sa vraćanjem bira kuglica.

   Koji je najverovatniji sastav kutije, ako je jednom izvučena crna i tri puta bela kuglica.

   *Rešenje:*

   Događaj $A$ - izvučena je jedna crna i tri bele kuglice. Hipoteze su:

   $H_0$ - u kutiji nema belih kuglica;

   $H_1$ - u kutiji je jedna bela kuglica;

$H_2$ - u kutiji su dve bele kuglice;

$H_3$ - u kutiji su tri bele kuglice.

Verovatnoće hipoteza su jednake i iznose

$$P(H_0)=P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{4}.$$

Uslovne verovatnoće događaja $A$ pri tim pretpostavkama su:

$$P(A|H_0)=0;$$

$$P(A|H_1)=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81};$$

$$P(A|H_2)=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81};$$

$$P(A|H_3)=0.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo

$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{81}+\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{81}=\frac{10}{81}.$$

Na osnovu Bajesove formule imamo

$$P(H_0|A)=P(H_3|A)=0;\ P(H_1|A)=\frac{1}{5};\ P(H_2|A)=\frac{4}{5}.$$

Znači, najverovatniji sastav kutije su 2 bele i 1 crna kuglica.

7. U korpi se nalazi 8 teniskih loptica, od kojih su 4 nove. Za prvu partiju se na slučajan način biraju tri lopte koje se posle igre vraćaju u korpu, pa se za drugu partiju ponovo na slučajan način biraju tri lopte. Kolika je verovatnoća da se druga partija igra samo novim loptama?

*Rešenje:*

Događaj $A$ - da se druga partija igra novim loptama. Hipoteze

$H_i$ - da je za prvu igru izabrano $i$-novih lopti ($i$=0,1,2,3).

Verovatnoće hipoteza su:

$$P(H_0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4}{56}=P(H_3),\ P(H_1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}}=\frac{24}{56}=P(H_2).$$

Uslovne verovatnoće događaja $A$ pri tim pretpostavkama su:

$$P(A|H_0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4}{56},\ P(A|H_1)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{1}{56};\ P(A|H_2)=P(A|H_1)=0.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo

$$P(A)=\frac{4}{56}\cdot\frac{4}{56}+\frac{24}{56}\cdot\frac{1}{56}+\frac{24}{56}\cdot 0+\frac{4}{56}\cdot 0=\frac{5}{392}.$$

8. U jednom skupu studenata ima $a$ odličnih, $b$ prosečnih i $c$ slabih studenata. Odličan student na

predstojećem ispitu može dobiti samo odličnu ocenu, prosečan sa jednakim verovatnoćama dobija odličnu ili dobru ocenu, a slab sa jednakim verovatnoćama dobija dobru, zadovoljavajuću ili slabu ocenu.

a) Na ispitu se na slučajan način proziva jedan student iz skupa. Naći verovatnoću da dobije dobru ili odličnu ocenu.

b) Na ispitu se na slučajan način prozivaju dva studenta. Naći verovatnoću da jedan dobije dobru, a jedan zadovoljavajuću ocenu.

*Rešenje:*

a) Razmatramo hipoteze:

$H_1$ - izabran je odličan student;

$H_2$ - izabran je prosečan student;

$H_3$ - izabran je slab student,

i događaj $A$ - da izabrani student dobije dobru ili odličnu ocenu.

$$P(H_1)=\frac{a}{a+b+c};\ P(H_2)=\frac{b}{a+b+c};\ P(H_3)=\frac{c}{a+b+c}.$$

Tražena verovatnoća je onda

$$P(A)=P(H_1)\cdot 1+P(H_2)\cdot 1+P(H_3)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{a+b+c}=\frac{3a+3b+c}{3(a+b+c)}.$$

b) Događaj $A$ – da jedan student dobije dobru, a drugi zadovoljavajuću ocenu.

Hipoteze su:

$H_1$ - izabrana su dva slaba studenta;

$H_2$ - izabran jedan slab i jedan prosečan student;

$H_3$ - izabrana ili dva odlična, ili dva prosečna,

ili odličan i prosečan, ili odličan i slab student.

Verovatnoće hipoteza su:

$$P(H_1)=\frac{\binom{c}{2}}{\binom{a+b+c}{2}}=\frac{c(c-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)};$$

$$P(H_2)=\frac{\binom{c}{1}\binom{b}{1}}{\binom{a+b+c}{2}}=\frac{2bc}{(a+b+c)(a+b+c-1)};$$

$$P(H_3)=1-P(H_1)-P(H_2).$$

Uslovne verovatnoće događaja $A$ pri tim pretpostavkama su:

$P(A|H_1)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$; $P(A|H_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$; $P(A|H_3)=0$.

Tražena verovatnoća je

$$P(A)=P(H_1)\cdot\frac{2}{9}+P(H_2)\cdot\frac{1}{6}+P(H_3)\cdot 0=\frac{2c(c-1)+3bc}{9(a+b+c)(a+b+c-1)}.$$

9. U jednoj kutiji nalaze se tri bele i dve crne kuglice, a u drugoj tri crne i dve bele kuglice.

   Iz prve kutije slučajno odabiramo kuglicu i prebacimo je u drugu kutiju, a zatim iz druge kutije slučajno izvlačimo kuglicu.

   a) Naći verovatnoću da se iz druge kutije izvuče bela kuglica (dog. $A$)

   b) Ako je izvučena kuglica iz druge kutije crna, kolika je verovatnoća da je prebačena bela kuglica?

   *Rešenje:*

   Hipoteze su:

   $H_1$ - iz prve kutije je prebačena bela kuglica;

   $H_2$ - iz prve kutije je prebačena crna kuglica.

   a) $P(H_1)=\frac{3}{5}$; $P(H_2)=\frac{2}{5}$; $P(A|H_1)=\frac{3}{6}$; $P(A|H_2)=\frac{2}{6}$.

   Tražena verovatnoća je:

   $$P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}=\frac{13}{30}.$$

   b) Na osnovu Bajesove formule imamo

   $$P(H_1|A^C)=\frac{P(A^C|H_1)P(H_1)}{P(A^C)}=\frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{17}{30}}=\frac{9}{17}.$$

10. Od $m+n$ cedulja student zna odgovor na $m$, a ne zna na $n$ cedulja. Kolika je verovatnoća da student izvuče cedulju koju zna, ako izvlači:

    a) prvi;

    b) drugi;

    c) treći.

    *Rešenje:*

    Događaj $A$ - da student izvuče cedulju koju zna.

    a) Na osnovu definicije klasične verovatnoće

    $$P(A)=\frac{m}{m+n}.$$

    b) Razmotrimo hipoteze:

    $H_1$ - da je njegov prethodnik izvukao cedulju koju student zna;

    $H_2$ - da je njegov prethodnik izvukao cedulju koju student ne zna.

    $P(H_1)=\frac{m}{m+n}$; $P(H_2)=\frac{n}{m+n}$; $P(A|H_1)=\frac{m-1}{m+n-1}$; $P(A|H_2)=\frac{m}{m+n-1}$.

    Tada je tražena verovatnoća

$$P(A)=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-1}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}=\frac{m}{m+n}.$$

c) Hipoteze su:

$H_1$ - izvučene su dve cedulje koje student zna;

$H_2$ - izvučena je jedna cedulja koju zna i jedna koju ne zna;

$H_3$ - obe cedulje koje su već izvučene student ne zna.

$$P(H_1)=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-1};\ P(H_2)=2\cdot\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1};$$

$$P(H_3)=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1};\ P(A|H_1)=\frac{m-2}{m+n-2};$$

$$P(A|H_2)=\frac{m-1}{m+n-2};\ P(A|H_3)=\frac{m}{m+n-1}.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo da je

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=\frac{m}{m+n}.$$

Dakle, "sreća" na ispitu ne zavisi od redosleda izvlačenja cedulja.