4. Гранична вредност функције

Нека је функција f дефинисана у окрњеној околини тачке a (тј. у тачки a не мора бити дефинисана). $A \in R$ је лимес функције f кад x тежи ка a, у ознаци $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ако важи: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in R)\left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$.

Нека је функција f дефинисана у некој окрњеној десној полуоколини тачке a. $A \in R$ је десни лимес функције f када x тежи ка a+(x тежи ка a с десне стране) у ознаци $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ ако важи:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in R)\left(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$.

Слично се дефинише леви лимес функције f у тачки a, тј. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in R)\left(0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$.

Функција f има лимес A у тачки a ако има леви и десни лимес у тачки a који су једнаки A тј. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$.

Да би постојала гранична вредност функције $f(x)$ у тачки $x = a$ потребно је и довољно да за сваки низ (x_n) тачака из $D(f)$ различитих од a за који $x_n \to a$, кад $n \to \infty$, испуњено $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Задаци:

1. Доказати да је $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 2) = 8$.

   Решење:

   Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада $|3x + 2 - 8| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon$ за

   $0 < |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3} = \delta(\varepsilon)$.

2. Доказати да је $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

   Решење:

   Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и $\delta = \min(1, 2\varepsilon)$. Онда из

   $|x - 2| < \delta \Rightarrow |x| = |2 + x - 2| \geq 2 - |x - 2| > 1$ па $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{|2 - x|}{2|x|} < \dfrac{2\varepsilon}{2 \cdot 1} = \varepsilon$.

3. Доказати да је $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$. Попунити следећу таблицу:

E	10	100	1000	10000
δ				

Решење:

Нека је $E>0$ произвољно.

Тада $\dfrac{1}{(x-1)^2}>E$ за $(x-1)^2<\dfrac{1}{E}$ или $0<|x-1|<\dfrac{1}{\sqrt{E}}=\delta(E)$.

Одатле добијамо:

$\delta(10)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\delta(100)=\dfrac{1}{10}$, $\delta(1000)=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$ и $\delta(10000)=\dfrac{1}{100}$.

4. Доказати да је $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

Решење:

Нека је $E>0$ произвољно. Тада $a^x>E$ за $x>\Delta=\log_a E$.

5. Доказати да функција $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ нема граничну вредност за $x\to 0$.

Решење:

Тврђење следи из тога, што низ

$x_n=\dfrac{2}{\pi(1+2n)}$ (n=1,2,...) за $n\to\infty$ тежи ка нули, а $f(x_n)=(-1)^n$ нема лимеса.

Наћи граничне вредности:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-5}{9x^4-3x^3+2x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-5}{9x^4-3x^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{9-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^5+x^4-3x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{x^5+x^4-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^4}}=0 .$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$, $m,n\in N$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ \infty, & n>m;\\ 0, & n<m.\end{cases} .$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^2+2x+5}{x^2-x+1}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+2x+5}{x^2-x+1}=\frac{5}{1}=5 .$$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-1}=5 .$$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^3-8\right)^2}{x^2-4x+4}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)^2}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2\left(x^2+2x+4\right)^2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)^2=144 .$$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2-2x+3}{x^2-1}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-3x^2-2x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2x^2-x-3\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}=-1 .$$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+2x-3}{x^3-5x+4}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+3\right)}{(x-1)\left(x^2+x-4\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+3}{x^2+x-4}=-\frac{7}{2}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\lim_{x\to -1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}\cdot\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{\sqrt{6x^2+3}-3x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3-3x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)}=1$$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

Решење:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0$$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+5x+4x^2}-3\right)\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+4x^2}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5+4x)}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=\frac{5}{6}.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\frac{1}{3}.$$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1.$$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{3}{5}\cdot 5x}=\frac{5}{3}.$$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\frac{b}{a}\cdot ax}=\frac{a}{b}.$$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=1.$$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sin x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{tg}x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=1.$$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}.$$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{4}.$$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{1-x^3}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{-(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\left[\begin{array}{c} x-1=t \\ x\to 1\Rightarrow t\to 0\end{array}\right]=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\left(t^2+3t+3\right)}=-\frac{1}{3}.$$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\sin x}{x^2}=-8.$$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\left[\begin{array}{c}\mathrm{arctg}x=t,\ x=\mathrm{tg}t \\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\mathrm{tg}t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\mathrm{tg}t}{t}}=1.$$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{\sin 2x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{arctg}3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}=\left[\begin{array}{c} x+2=t \\ x\to -2\Rightarrow t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t(t-2)}=-\frac{1}{2}.$$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{5}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{5}=e^{5}.$$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}\right]^{m}=e^{m}.$$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{x}\right)^{x}=e^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^{2}}}.$$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}+2}{x^{2}+1}\right)^{x^{2}}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}+2}{x^{2}+1}\right)^{x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^{2}+1}\right)^{x^{2}+1-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^{2}+1}\right)^{x^{2}+1}}{\left(1+\frac{1}{x^{2}+1}\right)}=e.$$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}=\begin{bmatrix}\mathrm{tg}x=t\\ x\to0\Rightarrow t\to0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{3x}=\left[\begin{array}{c}\dfrac{3}{2x-3}=u,\ x=\dfrac{3}{2u}+\dfrac{3}{2}\\ x\to\infty\Rightarrow u\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{3(3+3u)}{2u}}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{9}{2}}\cdot\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{9}{2u}}=1\cdot e^{\frac{9}{2}}=e^{4}\sqrt{e}\,.$$

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{5x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\frac{5}{3}\cdot 3x}=\frac{3}{5}\,.$$

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{\mathrm{tg}\,nx}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{mx}-1}{\mathrm{tg}\,nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{mx}-1}{mx}\cdot mx}{\frac{\mathrm{tg}\,nx}{nx}\cdot nx}=\frac{m}{n}\,.$$

37. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x}-e}{x-1}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}\cdot e-e}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}=e\,.$$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^{x}-1}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^{x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{3^{x}-1}{x}}=\frac{1}{\ln 3}\,.$$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin x}\cdot\frac{1}{e^x}=2\,.$$

40. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.

Решење:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1\,.$$