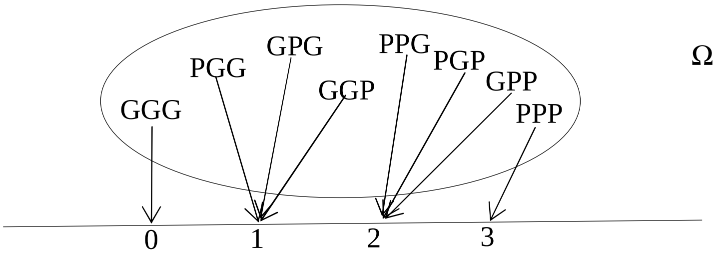
SLUČAJNE PROMENLJIVE

1. Pojam slučajne promenljive

Funkcija X koja svakom ishodu $\omega \in \Omega$ dodeljuje realni broj $X(\omega)$ naziva se slučajna promenljiva. Slučajne promenljive označavamo velikim slovima *X*, *Y*, *Z*, ...

Primeri:

1. Novčić se baca tri puta. Neka je X broj registrovanih pisama. Onda je
   $\Omega = \{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG\}$ i $X(PPP) = 3$,
   $X(PPG) = 2$, $X(PGP) = 2$, $X(GPP) = 2$, $X(PGG) = 1$, $X(GPG) = 1$,
   $X(GGP) = 1$, $X(GGG) = 0$. (videti sliku).



Slika 1.

Neka je dat neki skup brojeva S. Sa $\{X \in S\}$ označimo događaj da slučajna promenljiva X „uzima“ vrednost iz skupa S. Pošto smo događanje definisali kao ω podskupove skupa Ω, to se $\{X \in S\}$ može shvatiti kao skup svih ω takvih da je $X(\omega) \in S$.

2. Neka je u prethodnom primeru $S = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Onda je

$$\{X \in S\} = \left\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right\} = \left\{\omega : -\frac{1}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right\} = = \{GGG, PGG, GPG, GGP, PPG, PGP, GPP\}, \text{ a}$$

$$P\{X \in S\} = P\left\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right\} = P(\{GGG, PGG, GPG, GGP, PPG, PGP, GPP\}) = \frac{7}{8}$$

Međutim, kada je jedna slučajna promenljiva definisana, onda nije potrebno u izračunavanju verovatnoća vezanih za nju da se uvek vraćamo na polazni skup Ω.

U prethodnom primeru slučajna promenljiva uzima vrednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$ i $P\{X = 0\} = \frac{1}{8}$, $P\{X = 1\} = \frac{3}{8}$, $P\{X = 2\} = \frac{3}{8}$ i $P\{X = 3\} = \frac{1}{8}$, pa pomoću ovih verovatnoća možemo da odredimo verovatnoću svakog događaja $\{X \in S\}$, gde je S neki skup brojeva.

U našem primeru je onda

$$P\{X \in S\} = P\left\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} =$$

$$P=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}.$$

Bavićemo se sa dva tipa slučajnih promenljivih: slučajne promenljive diskretnog tipa i slučajne promenljive neprekidnog tipa.

Za slučajnu promenljivu X kažemo da je diskretnog tipa, ako postoji prebrojiv skup $R_X=\{x_1, x_2, ...\}$, tako da je $P\{X \in R_X\}=1$ ili manje precizno X može da „uzima“ vrednosti samo iz R_X.

Slučajna promenljiva iz Primera 1. je diskretna slučajna promenljiva, jer je $R_X=\{0,1,2,3\}$.

Slučajna promenljiva diskretnog tipa je određena ako su nam poznate verovatnoće $p(x_i)=P\{X=x_i\}$ za svako $x_i \in R_X$. Skup parova $(x_i, p(x_i))$ čini raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X, koju najčešće zapisujemo u obliku šeme:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad (1)$$

U Primeru 1. je

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Jasno je da je

$$p(x_i)\geq 0 \text{ i } \sum p(x_i)=1,$$

jer je

$$\{X=x_1\}+\{X=x_2\}+...=\{X \in R_X\}.$$

2. Funkcija raspodele

Funkcija raspodele slučajne promenljive X definiše se kao:

$$F(x)=P\{X<x\},\ \infty<x<+\infty \qquad (2)$$

Funkcija raspodele ima sledeća svojstva:

1. Monotonost: ako je $x_1<x_2$, tada je $F(x_1)\leq F(x_2)$.

   Ovo svojstvo jasno sledi iz $\{X<x_1\}\subset\{X<x_2\}$, te $P\{X<x_1\}\leq P\{X<x_2\}$, odnosno $F(x_1)\leq F(x_2)$.

2. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, sledi iz $\{X<-\infty\}=\phi$, $\{X<+\infty\}=\Omega$.

3. $F(x)$je funkcija neprekidna s leva: $F(x-0)=F(x)$.

   Ova činjenica sledi iz:

   ako niz $x_n \to x$, kod $n\to\infty$, tada $\{X<x_n\}$, $n=1,2,...$, čine monotono neopadajući niz i $\{X<x\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X<x_n\}$, pa je

   $$F(x)=P\{X<x\}=\lim_{n\to\infty}P\{X<x_n\}=\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x-0).$$

   Naime, preciznije važi teorema:

   Teorema:

   Funkcija $F(x)$, $-\infty<x<+\infty$ je funkcija raspodele neke slučajne promenljive ako i samo ako je monotona neopadajuća, neprekidna s leve strane i $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Kod slučajnih promenljivih diskretnog tipa funkcija raspodele je stepenasta. Veličina skoka u tački x_k je $P\{X=x_k\}$, tako da je x_k tačka prekida prve vrste funkcije $F(x)$.

3. Neprekidna slučajna promenljiva

Slučajna promenljiva X je neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $f(x)\geq 0$, $-\infty<x<+\infty$ takva da je $P\{a\leq X\leq b\}=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Funkcija $f(x)$ zove se gustina (raspodele verovatnoće) slučajne promenljive X.

Očigledno je:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1, \quad \text{..........} \quad (3)$$

jer je uvek $P(-\infty<X<+\infty)=1$.

Pošto za slučajnu promenljivu X neprekidnog tipa za svaki broj x_0 je $P\{X=x_0\}=0$, sledi da je:

$$P\{a\leq X\leq b\}=P\{a<X\leq b\}=P\{a\leq X<b\}=P\{a<X<b\}=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Kako je $F(x)=P\{X<x\}=P\{-\infty<X<x\}$, to je

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad \text{..........} \quad (4)$$

odakle

$$F'(x)=f(x) \quad \text{..........} \quad (5)$$

u svakoj tački neprekidnosti gustine. Takođe, važi da je verovatnoća

$$P\{a\leq X\leq b\}=F(b)-F(a) \quad \text{..........} \quad (6)$$

Primeri:

1. Odrediti konstantu k tako da funkcija:

$$f(x)=\begin{cases} k(2-x), & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & x<0 \vee x>2 \end{cases}$$

bude gustina raspodele slučajne promenljive X, zatim odrediti funkciju raspodele i izračunati verovatnoću $P\left(X<1 \middle| X>\frac{1}{3}\right)$.

Rešenje:

Iz $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, sledi da je $\int\limits_0^2 k(2\text{-}x)dx=k\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=1$, tj. $k=\frac{1}{2}$ pa je

$$f(x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2}, & 0\leq x\leq 2 \\ 0, & x<0 \wedge x>2 \end{cases}.$$

Kako je $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, imamo:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x-\dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Tražena verovatnoća je:

$$P\left(X<1 \middle| X>\frac{1}{3}\right)=\frac{P\left(\frac{1}{3}<X<1\right)}{P\left(X>\frac{1}{3}\right)}=\frac{F(1)-F\left(\frac{1}{3}\right)}{1-F\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{36}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{36}\right)}=\frac{16}{25}.$$

2. Za slučajnu promenljivu X kažemo da ima uniformnu raspodela na intervalu $[a,b]$, u oznaci $X:U(a,b)$, ako je gustina

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & x<a, x>b \end{cases}.$$

Ovde imamo neprebrojivo mnogo ishoda: to su sve tačke intervala $[a,b]$ i verovatnoća da je „slučajna tačka“ X u nekom podintevalu $[\alpha,\beta]$, zavisi samo od njegove dužine, a ne i položaja podintervala:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$