Uslovna verovatnoća. Proizvod i zbir verovatnoća

1. Sa $P(A|B)$ obeležavamo uslovnu verovatnoću događaja *A* pod uslovom da se desio događaj *B*.

   Događaji *A* i *B* su nezavisni, ako realizacija jednog od njih ne menja verovatnoću realizacije drugog. Za nezavisne događaje važi: $P(A|B) = P(A)$; $P(B|A) = P(B)$.

2. Za proizvoljna dva događaja *A* i *B*

   $P(AB) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$.

   Ako imamo *n* događaja $A_1, A_2, ..., A_n$, onda $P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$.

   Događaji $A_1, A_2, \ldots$ su nezavisni (u ukupnosti) ako za svaki konačan niz indeksa $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ $P(A_{k_1} A_{k_2} \ldots A_{k_n}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \ldots P(A_{k_n})$.

3. Za događaje *A* i *B* važi

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

   U slučaju, da su događaji *A* i *B* disjunktni

   $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

   Suma verovatnoća dva suprotna događaja je jednaka 1:

   $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

   Verovatnoća sume nekoliko disjunktnih događaja jednaka je sumi njihovih verovatnoća:

   $$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Primeri:

1. Ako su *A* i *B* nezavisni događaji, dokazati da su:
   a) A i $\overline{B}$; b) $\overline{A}$ i B; c) $\overline{A}$ i $\overline{B}$ nezavisni.

   Dokaz:

   Kako je $A = AB + A\overline{B}$, važi $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ tj.

   $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$, a pošto su A i B nezavisni imamo da je

   $P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$,

   što je i trebalo dokazati.

   Dokaz pod b) i c) slično.

2. a) Ako je $A \subset B$ mogu li A i B biti nezavisni?

   b) Dokazati da je događaj A za koji je $P(A) = 0$ ili $P(A) = 1$ nezavisan od bilo kog drugog događaja.

   Rešenje:

   a) Kako je $A \subset B$, to je $AB = A$, pa je $P(AB) = P(A) = P(A) \cdot P(B)$ ako je $P(B) = 1$ ili $P(A) = 0$.

b) – $\overset{\circ}{1}$: Neka je $P(A)=0$. Pošto $AB\subset A$ za svako B, biće $P(AB)\le P(A)=0$, tj. $P(AB)=0$, a onda $P(AB)=P(A)P(B)$.

b) – $\overset{\circ}{2}$: Ako je $P(A)=1$, onda je $P(\overline{A})=0$, pa su $\overline{A}$ i B nezavisni na osnovu $\overset{\circ}{1}$, a time i $\overline{\overline{A}}=A$ i B prema zadatku 1.

3. Ako događaj AB implicira događaj C, dokazati da je $P(A)+P(B)-P(C)\le 1$.

   Dokaz:

   Iz $AB\subset C$, zaključujemo da $P(AB)\le P(C)$, a iz $A\cup B\subset \Omega$ sledi:

   $P(A\cup B)\le P(\Omega)=1$.

   Dalje,

   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\le 1$, pa je

   $P(A)+P(B)\le 1+P(AB)\le 1+P(C)$, tj.

   $P(A)+P(B)-P(C)\le 1$, što je trebalo i dokazati.

4. Neka je $P(A|B)=0{,}8$, $P(B|A)=0{,}6$ i $P(B)=0{,}4$. Naći $P(A)$ i $P(A|\overline{B})$.

   Rešenje:

   Iz $P(AB)=P(A)\ P(B|A)=P(B)\ P(A|B)$, imamo

   $$P(A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B|A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}8}{0{,}6}=\frac{8}{15}.$$

   dalje, $P(A)=P\big(A(B+\overline{B})\big)=P(AB+A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$, odakle je

   $P(A)-P(AB)=P(\overline{B})P(A|\overline{B})$ tj. $\frac{8}{15}-0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}6\cdot P(A|\overline{B})$.

   Dakle $P(A|\overline{B})=\dfrac{\frac{8}{15}-\frac{32}{100}}{\frac{6}{10}}=\dfrac{16}{45}$.

5. Od svih učenika koji su polagali popravni ispit iz matematike i stranog jezika u jednoj školi, 10% nije položilo matematiku, 12% strani jczik, a 2% ni jedno ni drugo. Ako slučajno odaberemo jednog učenika da li su događaji:

   A - nije položio matematiku i

   B - nije položio strani jezik

   nezavisni? Kakvi su $\overline{A}$ i $\overline{B}$ po zavisnosti?

   Rešenje:

   Pošto je

   $P(A)=0{,}1$ i $P(B)=0{,}12$, to

   $P(AB)=0{,}02\ne P(A)\cdot P(B)=0{,}1\cdot 0{,}12=0{,}012$

   pa su događaji A i B zavisni, a onda su $\overline{A}$ i $\overline{B}$ zavisni (videti zadatak 1.).

6. Iz špila od 32 karte slučajno je izvučena karta. Naći verovatnoću da je izvučena karta herc ako je poznato da nije tref.

   Rešenje:

Neka je:

A - događaj izvučena karta je herc, a

B - događaj izvučena karta nije tref.

Kako je $A \subset B$, to je $AB = A$.

Dalje, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

7. U jednoj kutiji se nalazi 8 belih i 10 crnih kuglica. Dva puta uzastopce se izvlači po jedna kuglica. Naći verovatnoću da su obe izvučene kuglice bele, ako se izvučena kuglica:

   1) ne vraća u kutiju,

   2) vraća u kutiju.

   Rešenje:

   Neka je:

   A - događaj da je prva izvučena kuglica bela, a

   B - događaj da je druga izvučena kuglica bela.

   U prvom slučaju $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} = \frac{28}{153}$,

   a u drugom $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{8}{18} \cdot \frac{8}{18} = \frac{16}{81}$.

8. Student je izašao na ispit znajući 20 od mogućih 25 pitanja. Ispitivač je dao studentu tri pitanja. Naći verovatnoću da će student znati sva tri pitanja.

   Rešenje:

   Označimo sa *A*, *B*, *C* redom događaje da student zna prvo pitanje, drugo pitanje i treće pitanje.

   Koristeći pojam uslovne vcrovatnoće, imamo

   $$P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}.$$

9. U jednu istu metu vrše se tri gađanja. Verovatnoća da će cilj biti pogođen pri prvom, drugom i trećem gađanju su respektivno $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}5$ i $p_3 = 0{,}7$. Odrediti verovatnoću da će u tri gađanja biti samo jedan pogodak,

   Rešenje:

   Označimo sa *A* događaj da je meta pogođena jedanput. Taj događaj se može realizovati na nekoliko načina: pogodak ostvaren prvi put, a pri drugom i trećem gađanju se promaši; ili pogodak u drugom, a promašaj u prvom i trećem gađanju, ili pogodak u trećem, a promašaj u prvom i drugom gađanju. Onda je

   $$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

   gde su A_1, A_2, A_3 pogotci pri prvom, drugom i trećem gađanju. Sada imamo

   $$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36$$

10. U kutiji se nalazi *a* belih i *b* crnih kuglica. Dva igrača naizmenično izvlače po jednu kuglicu iz kutije, vraćajući svaki put u kutiju izvučenu kuglicu. Igra se produžava dok jedan od igrača izvuče belu kuglicu. Odrediti verovatnoću da belu kuglicu izvuče igrač koji je počeo igru.

    Rešenje:

Označimo sa A događaj da belu kuglicu izvuče igrač koji je počeo igru. Na osnovu definicije klasične verovatnoće, verovatnoća da igrač izvuče belu kuglicu je $p=\frac{a}{a+b}$, a verovatnoća da igrač izvuče crnu kuglicu je $q=\frac{b}{a+b}$.

Dalje, imamo

$$P(A)=p+q^2p+q^4p+\ldots=p\left(1+q^2+q^4+\ldots\right)=$$
$$=p\cdot\frac{1}{1-q^2}=\frac{p}{(1-q)(1+q)}=\frac{p}{p(1+q)}=\frac{1}{1+\frac{b}{a+b}}=\frac{a+b}{a+2b}.$$